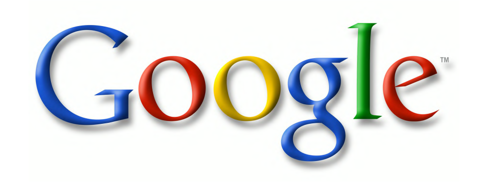
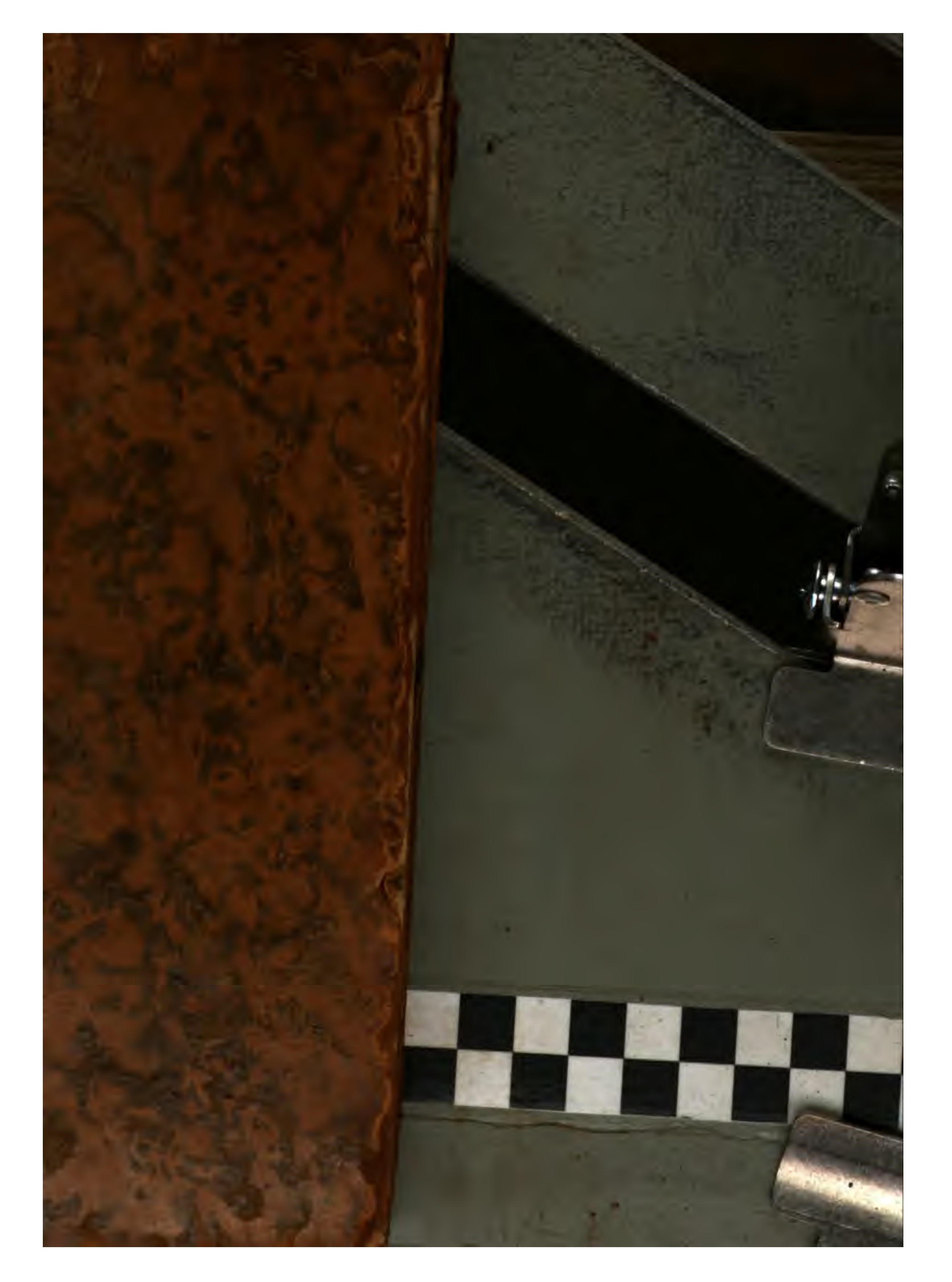






1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE


NON
CIRCULATING

OPUSCULES

MATHÉMATIQUES.

TOME VII.

OPUSCULES
MATHÉMATIQUES,

OU

MÉMOIRES sur différens Sujets de GÉOMÉTRIE, de MÉCHANIQUE, d'OPTIQUE, d'ASTRONOMIE, &c.

Par M. D'ALEMBERT, *Secrétaire perpétuel de l'Académie Françoise, des Académies Royales des Sciences de France, de Prusse, d'Angleterre & de Russie, de l'Institut de Bologne, & des Sociétés Royales des Sciences de Turin & de Norwege.*

TOME VII.



A PARIS, RUE DAUPHINE,

Chez CLAUDE-ANTOINE JOMBERT, fils aîné, Libraire du Roi, près le Pont-Neuf.

M. DCC. LXXX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.



AVERTISSEMENT.

LA plupart des morceaux que renferment ce Volume & le ſuivant, ſont faits il y a trois ou quatre années, & quelques-uns même depuis bien plus long-temps. Ce ſeront vraiſemblablement, à peu de choſe près, mes derniers Ouvrages Mathématiques, ma tête, fatiguée par quarante-cinq années de travail en ce genre, n'étant plus guère capable des profondes recherches qu'il exige. Un de mes amis a même bien voulu m'épargner le travail pénible de la correction des épreuves. Les imperfections inévitables du manuſcrit ont occaſionné des fautes d'impreſſion, dont j'ai remarqué quelques-unes en parcourant les feuilles imprimées ; on trouvera les principales dans l'*Errata ;* je me flatte que les autres ſeront aiſées à corriger. On pourra

aussi, pour certains éclaircissemens, consulter l'*Appendice* qui termine chaque Volume.

Je demande donc aux Géomètres pour ces deux Tomes de mes *Opuscules*, plus d'indulgence encore qu'ils n'ont bien voulu en avoir pour les précédens; & je serai content de ce dernier fruit de mon travail, s'ils y trouvent au moins quelques vues dont ils puissent tirer un meilleur parti que moi, ce qui ne leur sera pas difficile.



TABLE DES TITRES

Contenus dans ce septiéme Volume.

CINQUANTE-DEUXIÉME MÉMOIRE.

CINQUANTE-TROISIÉME MÉMOIRE.

Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques.

REMARQUES SUR LE MÉMOIRE PRÉCÉD.

CINQUANTE-QUATRIÉME MÉMOIRE,

Contenant différentes Recherches d'Optique.

CINQUANTE-CINQUIÉME MÉMOIRE.

Recherches sur différens Sujets.

NOTES SUR LES DÉMONSTRAT. PRÉCÉD.

APPENDICE contenant quelques Remarques relatives à différens endroits de ce VIIe Volume.

Fin de la Table.

EXTRAIT des Regîtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 5 Juillet 1780.

MESSIEURS LE MONNIER, l'Abbé BOSSUT, & moi, ayant rendu compte à l'Académie des Volumes VII & VIII des *Opuscules Mathématiques* de M. D'ALEMBERT, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de paroître sous son Privilége. En foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris, ce 5 Juillet 1780.

Le Marquis DE CONDORCET,
Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

Ouvrages de M. d'Alembert, qui se trouvent chez le même Libraire.

Opuscules mathématiques, ou Mémoires sur différens sujets de Géométrie, de Méchanique, d'Optique, d'Astronomie, &c. 8 vol. *in*-4°, pet. format, avec 30 planches, 1761 — 1780, 84 l.
Les Tomes V, VI, VII & VIII, séparément, 12 liv. chaque.

Recherches sur différens points importans du systême du Monde, 3 vol. *in*-4°, pet. format, avec 6 planches, 1754 — 1756, 21 l.
Tome III, séparément, 7 l. 10 s.

Nova Tabularum Lunarium emendatio, 20 pag. *in*-4°, br. 12 s.

Nouvelles Tables de la Lune, 32 pag. *in*-4°, pet. format, br. 18 s.

Traité de Dynamique, dans lequel les loix de l'équilibre & du mouvement des corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une maniere nouvelle, &c. *in*-4°, petit format, nouvelle édition, 1758, avec 5 planches, 9 l.

Traité de l'équilibre & du mouvement des Fluides, pour servir de suite au Traité de Dynamique, in-4°, pet. format, nouv. édit. considérablement augmentée, avec 10 planches, 1770, 12 l.

Recherches sur la précession des Equinoxes & sur la nutation de l'axe de la Terre dans le systême Newtonien, *in*-4°, pet. format, avec 4 planches, 1749, 7 l. 10 s.

Essai d'une nouvelle Théorie de la résistance des Fluides, *in*-4°, petit format, avec 2 planches, 1752, 7 l. 10 s.

Réflexions sur la cause générale des Vents, Pièce qui a remporté le prix de l'Académie des Sciences de Berlin, en 1746, *in*-4°, petit format, avec deux planches, nouvelle édition, corrigée. *Sous presse.*

Elémens de Musique théorique & pratique, suivant les principes de M. Rameau, éclaircis, développés & simplifiés, nouvelle édition considérablement augmentée, *in*-8°, avec 10 planches, 1772, 4 l. 10 s.

Mêlanges de Littérature, d'Histoire & de Philosophie, 5 vol. *in*-12, nouvelle édition, augmentée, 1770, 13 l.

OPUSCULES



OPUSCULES MATHÉMATIQUES.

LII. MÉMOIRE.

§. I.

Réflexions sur la Théorie des Ressorts.

1. IL me semble que la Théorie de la tension des ressorts, telle que les Géometres l'ont donnée jusqu'à présent, laisse beaucoup à desirer. Voici quelques doutes sur ce sujet; je les soumets à leur jugement.

2. On suppose ordinairement que le ressort BA (Fig. 1) étant fixe en B, & tendu par un poids P, l'effort du poids P en M est proportionnel au moment $P \times AQ$ de ce poids, & que cet effort est outre cela en raison de la courbure en M, c'est-à-dire, en raison

inverſe du rayon oſculateur; ce qui donne l'équation de la courbe que les Géometres ont nommée élaſtique.

3. On peut demander d'abord comment le poids *P* peut agir en *M* par un bras de levier? On le concevroit aiſément ſi *AM* étoit une ligne roide & inflexible, mais elle ne l'eſt pas.

4. Cette premiere difficulté (Fig. 2) a pourtant une ſolution; car on peut évidemment conſidérer le reſſort bandé comme une ſuite de lignes droites infiniment petites & inflexibles *BR*, *RG*, *GO*, *OA*, &c. faiſant entr'elles des angles infiniment obtus *BRG*, *RGO*, &c. & auxquelles ſoient appliquées en *R*, *G*, *O*, &c. ou même, ſi l'on veut, dans tous les points des petits côtés inflexibles *BR*, *RG*, &c. des puiſſances que je nomme *K*, & qui tendent à remettre tous ces petits côtés en ligne droite les uns avec les autres. Ces puiſſances (pour rendre la ſolution plus générale) peuvent être ſuppoſées dirigées comme on voudra, & faiſant avec ces petits côtés des angles variables quelconques.

5. Cela poſé, il eſt facile de démontrer par les principes de la Méchanique, que le moment du poids *P* par rapport à un point quelconque, *R*, par exemple, eſt égale à la ſomme des momens des puiſſances *K* de tout l'arc *RA*, par rapport au même point *R*.

6. En effet, les petites lignes *BR*, *RG*, &c. étant ſuppoſées mobiles autour des points *R*, *G*, *O*, &c.

il eſt clair que pour l'équilibre entre le poids P & les puiſſances K, il faut qu'à chaque angle R, G, &c. la force réſultante de l'action du poids P & de toutes les puiſſances K de l'arc AR, AG, &c. ſoit dirigée ſuivant RG, GO, &c. autrement les petites lignes RG, GO, &c. ſouffriroient encore quelque flexion autour des points R, G, &c.

7. Or dans cette ſituation d'équilibre, qu'on ſuppoſe ſucceſſivement un point fixe en R, en G, &c. & la partie $RGOA$, GOA, &c. abſolument roide & inflexible, il eſt évident que l'équilibre ſubſiſtera.

8. Donc la ſomme des momens des puiſſances K en R, en G, &c. eſt $=$ au moment du poids P par rapport à K, à G, &c..

9. Imaginons maintenant les puiſſances K décompoſées (Fig. 1) en puiſſances X parallèles aux $x(AQ)$ & en puiſſances Y parallèles aux $y(QM)$ & nommant l'arc AM, s, nous aurons la différence du moment du poids P par rapport à M, c'eſt-à-dire, $Pdx =$ à la différence des momens des puiſſances Y par rapport à M, c'eſt-à-dire, $dy\int Yds$, plus la différence des momens des puiſſances X par rapport à M, c'eſt-à-dire, $dy\int Xds$; donc ſi l'on appelle ω le complément de l'angle AMQ que la courbe fait en M avec la verticale MQ, on aura, à cauſe de $dx = ds$ coſ. ω, & $dy = ds$ ſin. ω, l'équation

Pds coſ. $\omega = ds$ coſ. $\omega \int Yds + ds$ ſin. $\omega \int Xds$, ou $P - \int Yds =$ tang. $\omega \times \int Xds$, & en différentiant de

nouveau, $-Yds = \text{tang.}\ \omega Xds + d\ \text{tang.}\ \omega \int Xds$; ou $-\frac{Yds - \text{tang.}\ \omega Xds}{d(\text{tang.}\ \omega)} = \int Xds$. Donc en ſuppoſant tang. $\omega = z$, on aura $d\left[\left(\frac{ds}{dz}\right)(Y + zX)\right] = -Xds$, & ſuppoſant encore $ds = pdz$, on aura $d(pY + pzX) = -pXdz$.

10. On peut conſidérer encore que $d(\text{tang.}\ \omega) = \frac{d\omega}{\text{coſ.}\ \omega^2}$, d'où $-Yds\ \text{coſ.}\ \omega^2 - \text{ſin.}\ \omega\ \text{coſ.}\ \omega \times Xds = d\omega \int Xds$; ce qui donne une autre forme à l'équation.

11. Or ſans pouſſer plus loin cette analyſe, il me ſemble d'abord que la ſolution eſt impoſſible, ſi la direction *AP* du poids *P* n'eſt pas tangente de la courbe en *A*; car il eſt d'abord évident que pour l'équilibre la force en *A* réſultante de l'action du poids *P* & des forces *X* & *Y* appliquées en *A*, doit être dirigée ſuivant (Fig. 2) *AO*; autrement il y auroit une nouvelle flexion en *O*. Donc, ſi l'on ſuppoſoit l'angle *OAZ* aigu, les forces *X*, *Y* appliquées en *A*, devroient être chacune du même ordre que la force du poids *P*. Donc les forces *X* & *Y* voiſines de celles du point *A*, devroient auſſi être du même ordre que *P*, autrement il y auroit un défaut de continuité dans l'expreſſion de ces forces; & il feroit de plus néceſſaire (pour l'obſervation de la même loi de continuité) que cela fût toujours ainſi, excepté tout au plus en quelques points iſolés de la courbe *BRGOA*; puiſque

les forces X & Y, après avoir été finies dans un certain espace de la courbe, ne peuvent être supposées infiniment petites dans le reste de cette même courbe.

12. Mais si d'un autre côté les puissances X & Y étoient par toute la courbe du même ordre que le poids P, elles ne pourroient lui faire équilibre, puisque la somme des momens de ces puissances par rapport à un point quelconque R, seroit infiniment plus grand que le moment du poids P par rapport au même point R; ce qui seroit contraire à l'article 5 ci-dessus.

13. Donc dans tous les points de la courbe $AOGR$, & par conséquent aussi au point A, les forces X & Y doivent être infiniment petites par rapport au poids P.

14. Donc la puissance K en A, résultante des forces X & Y est aussi infiniment petite par rapport au même poids P; & puisque la force résultante du poids P & de la force K en A doit être dirigée suivant AO, il s'ensuit que le premier côté AO de la courbe fait un angle infiniment petit avec la direction du poids P, c'est-à-dire qu'il est dans cette direction, & par conséquent vertical.

15. Imaginons présentement que les forces qui tendent le ressort, au lieu d'être décomposées parallélement aux x & aux y, le soient en chaque point dans la direction des petits côtés ds de la courbe, & dans une direction perpendiculaire à ces petits côtés, & nommons S les premieres de ces puissances, & ρ les autres, on verra d'abord, 1°. que ρ doit être infiniment

petit au point A. 2°. Que $P - \int S ds$ sera la force qui tirera chaque petit côté de la courbe suivant sa longueur. 3°. Que cette force en produira une autre perpendiculaire au petit côté suivant, & égale à $\frac{ds}{R} \cdot (P - \int S ds)$, R étant le rayon osculateur en M (Fig. 1). 4°. Que cette derniere force $\frac{ds}{R}(P - \int S ds)$ doit être $= \rho$, afin que le côté suivant soit tiré en ligne droite. D'où il est clair que chacune des forces ρ doit être infiniment petite par rapport au poids P.

16. On voit aussi que les forces S doivent de même être infiniment petites par rapport à P, excepté tout au plus en quelques points isolés de la courbe AM, puisqu'autrement $\int S ds$ seroit infini par rapport à P, ce qu'on ne sauroit supposer ici.

17. Imaginons donc que g soit la pesanteur, & M la masse du poids P, on aura d'abord $P = g.M$; supposons ensuite que $\alpha^2 ds$ soit la masse de chaque petite portion de la courbe AM, que je regarde comme un corps solide très-mince, dont l'épaisseur en M est α^2; soient enfin γ, σ, les forces variables appliquées en chaque point, on pourra supposer $S = \sigma\alpha^2$, & $\rho = \gamma\alpha^2 ds$, d'où l'on aura $g.M - \int \sigma\alpha^2 ds = R\gamma\alpha^2$; donc $-\sigma ds = d(\gamma R)$, en supposant pour plus de simplicité α^2 constant dans toute l'étendue de la courbe.

18. Si $\sigma = 0$, c'est-à-dire, si le ressort est inextensible suivant sa longueur, & simplement flexible, il ne

restera que les forces γ, & on aura $\gamma R =$ à une constante, c'est-à-dire, γ en raison inverse de R, ce qu'on sait depuis long-temps; de plus il est clair, par l'article 15, que dans cette hypothèse il ne peut y avoir d'équilibre, à moins que la direction AP ne soit tangente de la courbe en A.

19. Or tous les Auteurs qui ont donné jusqu'ici des solutions du problême de la courbe élastique, supposent, ce me semble, que la direction du poids P fait en A un angle aigu avec la courbe, la tangente au point fixe B étant horisontale. Voyez l'Ouvrage de M. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas*, &c. page 268.

20. Cette hypothèse, dira-t-on, paroît confirmée par l'expérience; car si on fixe en B un ressort d'acier, par exemple, il paroît se courber de maniere que l'angle RAM est aigu.

21. On pourroit dire que l'expérience trompe les yeux là-dessus, & qu'il est absolument nécessaire que l'extrêmité des fibres du ressort en A soit dirigée suivant AP, autrement la force γ en A devroit être du même ordre que P, & la force γ infiniment près du point A, seroit infiniment petite par rapport à P; ce qui paroît choquant. Mais j'avoue que cette réponse à la difficulté ne paroît pas satisfaisante, & que l'observation y semble absolument contraire.

22. Ce n'est pas tout. La conséquence de $\gamma R =$ à une constante, paroît avoir un inconvénient, c'est qu'il

en résulteroit que le ressort pourroit prendre une figure courbe quelconque. En effet, il paroît très-naturel de supposer que la force infiniment petite $\gamma ds . \alpha^2$ qui tend à remettre en ligne droite les deux petits (Fig. 2) côtés *RG*, *GO*, est proportionnelle à l'angle infiniment petit *OGQ*, en sorte que si on appelle ω la force qui répond à un angle infiniment petit α', pris à volonté, on aura $\alpha^2 \gamma ds = \frac{\omega}{\alpha'} \times \frac{ds}{R}$; or on a (art. 17) $\gamma \alpha^2 ds = \frac{gMds}{R}$ ou $\frac{Pds}{R}$; donc $\frac{Pds}{R} = \frac{\omega}{\alpha'} \times \frac{ds}{R}$, 1 exprimant le sinus total; d'où $\omega = \frac{P\alpha'}{\text{sin. tot.}}$. Or de-là il paroît s'ensuivre, 1°. que si le ressort a une telle force élastique, que $\omega = \frac{P\alpha'}{\text{sin. tot.}}$, il peut prendre toutes sortes de figures étant tendu par le poids *P*, pourvu que *AP* soit tangente en *A*. 2°. Que si $\omega > \frac{P\alpha'}{\text{sin. tot.}}$ le ressort ne pourra jamais être fléchi par le poids *P*, mais restera situé horisontalement & en ligne droite. 3°. Que si $\omega < \frac{P\alpha'}{\text{sin. tot.}}$, le poids *P* fléchira le ressort jusqu'à lui faire prendre la situation rectiligne verticale.

23. Je demande aux Géometres si ces résultats leur paroissent vrais, & conformes à l'expérience. Je doute qu'ils conviennent qu'un ressort plié par un poids, peut prendre toutes sortes de courbures; cependant la supposition sur laquelle cette assertion est fondée, paroît

aſſez naturelle, ſavoir que la force γ qui, en vertu du reſſort, agit à chaque point de la courbe perpendiculairement à la courbe même, eſt en raiſon inverſe du rayon de courbure.

24. Cette ſuppoſition même ne paroît pas s'éloigner de celle que font tous les Géometres dans la ſolution du problême de la courbe élaſtique, & que nous avons énonçée ci-deſſus, art. 2.

25. Mais l'hypothèſe ſur laquelle eſt fondée cette ſolution, me paroît ſuſceptible d'une difficulté très-conſidérable. Il me ſemble que la plûpart des Auteurs qui ont réſolu juſqu'ici ce problême, entr'autres MM. Euler & Daniel Bernoulli (Voyez Mémoires de Peterſb. Tome III, pag. 67 & 71) ont ſuppoſé que la force γ qui agit perpendiculairement au petit côté GO, par exemple, & qu'on ſuppoſe placée en O, fait équilibre avec le moment $P \times AQ$ du poids P par rapport au point G. Or il me paroît démontré (art. 6 ci-deſſus) que $P \times AQ$ n'eſt pas ſeulement égal au moment de la puiſſance γ par rapport au point G, mais à la ſomme des momens de toutes les puiſſances γ (qui agiſſent ſur l'arc AM) par rapport à ce même point G. La ſuppoſition de $\gamma \times GO = P \times AQ$ ne feroit admiſſible qu'en ſuppoſant $RGOA$ une verge inflexible, & γ la ſeule puiſſance appliquée à cette verge au point O; ſuppoſition qui ne s'accorde nullement avec celle d'un reſſort *flexible*, qui fait effort dans *tous ſes points* pour ſe rétablir.

26. De plus, en admettant même la ſuppoſition de MM. Bernoulli & Euler, il paroît s'enſuivre que puiſque GO eſt infiniment petit, & que $\gamma \times GO = P \times AQ$, la force γ appliquée en O eſt infinie par rapport à P, ce qui paroît bien difficile à ſuppoſer, d'autant qu'on peut imaginer GO de tel ordre d'infiniment petit qu'on voudra, & qu'ainſi γ ſera ſucceſſivement infini du premier, du ſecond, du troiſiéme, &c. ordre par rapport à P.

27. Aucun Auteur, que je ſache, excepté M. de la Grange, ne s'eſt mis en peine de réſoudre cette difficulté, que nous avions déja indiquée ailleurs (*Opuſcules*, Tome I, pag. 13); ce grand Géometre a donné dans les Mémoires de Berlin, 1769, une maniere fort ſimple & fort ingénieuſe d'expliquer l'action du reſſort. Pour cela, il prolonge juſqu'à la verticale AP tous les petits côtés RG, GO; faiſant enſuite $GQ' = GO$, & en ſuppoſant par-tout en O, & en Q' une force γ, qui tende à rapprocher les côtés GQ', GO, il prouve (comme on le peut voir dans ſon excellent Mémoire) que le moment du poids P par rapport à G, eſt égal au moment de cette force γ par rapport à G, c'eſt-à-dire, à $\gamma \times GO$; il ſuppoſe enſuite avec tous les autres Mathématiciens, que ce dernier moment eſt en raiſon inverſe de R; d'où réſulte l'équation ordinaire de la courbe élaſtique.

28. M. de la Grange parvient à cette ingénieuſe explication, en ſuppoſant les côtés du reſſort prolongés

jufqu'en *AP*, les forces en *Q'* & *O* égales & contraires, & des forces en *V*, *Z* auffi égales & contraires, lefquelles il prouve être égales au poids *P*, ce qui n'a lieu qu'hypothétiquement; puifqu'il n'y a ici de forces réellement agiffantes que le poids *P*, & les forces appliquées directement aux côtés *RG*, *GO*, *non prolongés*, lefquelles forces tendent à remettre ces deux côtés en ligne droite, & ainfi des autres.

29. Or il feroit à defirer, ce me femble, que M. de la Grange eût fait voir, fans prolonger les côtés, & fans toutes les forces hypothétiques qu'il imagine, comment le poids *P* eft en équilibre avec les forces directement appliquées aux points *G*, *O*; ce qui paroît néceffaire pour mettre la folution hors de doute.

30. M. de la Grange paroît fuppofer encore (& avec raifon, ce me femble) que la force qui tend à rétablir le reffort aux points *G*, *O*, &c. eft perpendiculaire aux côtés de la courbe; mais au point *A*, où le poids eft attaché, il paroît fuppofer auffi (& il me femble que fa théorie exige cette hypothèfe) que la force du reffort agit fuivant *AV* dans une direction verticale & contraire à *AP*. Je ne fais fi ces deux fuppofitions s'accordent entr'elles, & s'il ne s'enfuivroit pas de-là que la force du reffort en *A*, & infiniment près du point *A* auroit des directions très-différentes; ce qui me femble difficile à admettre; de plus, il paroît que la force du reffort en *A* doit être fuppofée perpendiculaire au côté *AO*.

31. Enfin, il me semble encore que la théorie de M. de la Grange ne leve pas la difficulté que nous avons déja faite à la théorie ordinaire (art. 26); savoir que la force γ appliquée aux différens points de la courbe, seroit infinie, & même d'un ordre d'infini aussi élevé qu'on voudroit. On ne voit pas trop bien d'ailleurs comment la force $\gamma \times GO$ pourroit être en raison inverse de R, ce qui donneroit encore $\gamma = \frac{aR}{GO} = -\frac{ads}{d\omega . ds} = -\frac{a}{d\omega}$; c'est-à-dire, non-seulement infinie, mais infinie d'un ordre d'autant plus grand que l'angle OGQ' des côtés de la courbe seroit supposé plus petit.

32. Toutes ces réflexions sont de simples questions que je lui propose, & que je l'invite à éclaircir pour l'instruction des Géometres, & pour mettre son ingénieuse théorie à l'abri de toute atteinte. Si on suppose avec M. Jacques Bernoulli (Mém. Acad. 1705) que le ressort a une certaine (Fig. 4) largeur ac, & que le moment du poids P par rapport à un point quelconque c, est $= \lambda \times ac$ (λ étant la force qui agit suivant ba & ab pour rapprocher les fibres ac, cb) les difficultés des articles 25 & 26 subsisteront toujours; la force γ sera infinie & toujours la même, de quelqu'ordre d'infiniment petit qu'on suppose l'angle acb ou $\frac{ds}{R}$; & d'ailleurs on n'explique pas comment (la

courbe *Ac* étant *flexible* dans tous ſes points) le moment du poids *P* par rapport à *c*, eſt égal au moment de la force contractive *ab* par rapport au même point *c*. On peut remarquer que, *ac* étant comme infiniment petit, cette hypothèſe de M. Jacques Bernoulli reviendroit à peu près à celle où l'on ſuppoſeroit les forces du reſſort tangentes à la courbe, ce qui donneroit dans l'article 17, $\gamma = 0$, & $\sigma = 0$; d'où l'on voit que cette ſuppoſition conduiroit à un réſultat illuſoire; ce qu'il eſt d'ailleurs aiſé de voir directement. Car ſi on ſuppoſe $\gamma = 0$ & les forces σ tangentes à la courbe, l'effort du poids *P* en *A* doit être détruit par la premiere force σ appliquée en *A*, & dirigée d'une maniere contraire au poids *P*, dont la direction, comme on l'a vu, doit toucher la courbe en *A*. Or l'action du poids *P* étant entierement détruite par la ſeule force du reſſort appliquée en *A*, il eſt clair que la force élaſtique doit être nulle, ou plutôt de nul effet dans tous les autres points; qu'ainſi $\sigma = 0$, & que le reſſort formera une ligne droite, ce qui eſt contre l'expérience.

33. Quoi qu'il en ſoit, il paroît évident que l'équation générale des courbes élaſtiques tendues par un poids eſt $-\sigma ds = d(\gamma R)$, la direction verticale *AP* étant tangente de la courbe en *A*.

34. Cette équation peut encore ſe déduire aiſément de la formule de l'article 10, ce qui prouvera l'accord de nos méthodes; en effet, il eſt aiſé de voir que la

force $X = \frac{\gamma dy}{ds} - \frac{\sigma dx}{ds} = y$ fin. $\omega - \sigma$ cof. ω, & que la force $Y = \frac{\gamma dx}{ds} + \frac{\sigma dy}{ds} = \gamma$ cof. $\omega + \sigma$ fin. ω; donc (art. 10) on aura, en fubftituant & réduifant, γ cof. $\omega = - \frac{d\omega}{ds} \int (\gamma ds$ fin. $\omega - \sigma ds$ cof. $\omega)$, ou $- \frac{\gamma ds}{d\omega}$ cof. $\omega = \int \gamma ds$ fin. $\omega - \int \sigma ds$ cof. ω; différentiant encore & réduifant, on aura $- \sigma ds$ cof. $\omega =$ cof. $\omega d\left(- \frac{\gamma ds}{d\omega}\right)$; & comme $d\omega = - \frac{ds}{R}$, il eft clair qu'on aura $- \sigma ds = d(\gamma R)$.

35. Dans la fuppofition de $\sigma = 0$, c'eft-à-dire, de l'inextenfibilité du reffort, il eft clair, & nous l'avons déja dit art. 18, que l'équation eft γR ou $- \frac{\gamma ds}{d\omega} =$ conft. & la nature de la courbe élaftique ne dépendra plus que des différentes fuppofitions qu'on pourra faire fur la valeur de γ.

36. Nous avons vu, article 22, que la fuppofition de $\gamma = \frac{B}{R}$, (B étant une conftante) quoiqu'en apparence très-naturelle, rend le problême indéterminé, & donne pour l'élaftique telle courbe qu'on voudra, ce qui ne paroît pas conforme à l'obfervation & à l'expérience. Si on fuppofoit $\gamma =$ à une fonction de R, on trouveroit R conftant, c'eft-à-dire que l'élaftique feroit toujours un cercle, dont le rayon dépendroit de

la force du reſſort; réſultat dont la vérité paroît auſſi très-douteuſe. Il faut donc tâcher de trouver une autre hypothèſe ſur la valeur de γ, qui ne mène pas à cette concluſion, & qui faſſe du problême de l'élaſtique un problême déterminé.

37. Voici une hypothèſe que peut-être on pourroit employer pour cet objet, & que je ſoumets, ainſi que toutes les précédentes, au jugement des Mathématiciens.

38. Je conſidere que ſi les petits côtés (Fig. 3) RG, GO, que je regarde pour un moment comme iſolés, obéiſſoient aux forces γ appliquées perpendiculairement en R, G, O, ſuivant Rr, Gg, Oo, les côtés RG, GO, parviendroient en rg, go, & que les petites lignes Oo, Gg, Rr feroient proportionnelles aux valeurs de γ en O, G, R.

39. Cela poſé, ſi les lignes Oo, Gg, Rr étoient égales, c'eſt-à-dire, ſi γ étoit la même aux points O, G, R, l'angle rgo feroit évidemment égal à l'angle RGO, & par conſéquent les forces γ n'auroient point diminué cet angle, quoique cette diminution ſoit néceſſaire par l'effort que font ces côtés pour ſe remettre en ligne droite.

40. Donc les lignes Oo, Gg, Rr, doivent être ſuppoſées inégales, ainſi que les forces γ qu'elles repréſentent, & la différence des angles rgo, RGO, ſera égale, comme il eſt aiſé de le voir, à $\frac{dd\gamma}{ds}$. Or la force

réelle qui tend à rétablir le ressort en ligne droite, peut être supposée proportionnelle à l'angle infiniment petit qui est le complément de l'angle RGO, c'est-à-dire, à $-d\omega$; (je mets $-d\omega$, parce que, s croissant, ω diminue); & cette force, comme on vient de le voir, est en chaque point proportionnelle à $\frac{dd\gamma}{ds}$. Donc $\frac{d\omega}{A} = \frac{dd\gamma}{ds}$, A étant une constante supposée connue par la force donnée du ressort; d'où $dd\gamma = \frac{d\omega ds}{A}$, & comme $\gamma = \frac{B}{R}$ en supposant $\sigma = 0$, on aura $\frac{d\omega ds}{A} = dd\left(\frac{B}{R}\right)$ ou $dd\left(\frac{Bd\omega}{ds}\right)$; équation dans laquelle $B = \frac{g.M}{\alpha^2}$, à cause de $\gamma R\alpha^2$ (art. 17) $= g.M$. Telle sera, dans l'hypothèse proposée, l'équation de l'élastique, qu'on intégrera par les méthodes connues. On se souviendra (art. 18) que $\omega = 90^\circ$ lorsque $s = 0$, & on se servira, pour déterminer les constantes inconnues, de la condition que $\gamma = 0$ lorsque $s = 0$ (art. 15), & que γ doit aussi être $= 0$ lorsque s est égal à la longueur donnée l du ressort, puisqu'au point où s a cette valeur, le ressort est fixement attaché.

41. On peut faire, si l'on veut, d'autres hypothèses sur la valeur de γ, car je ne tiens pas exclusivement, à beaucoup près, à celle que je viens de proposer. Il est même facile d'en imaginer plusieurs; mais en général elles

elles doivent être telles que $x = o$ lorsque $s = o$ & lorsque $s = l$. D'après ces hypothèses & l'équation $yRa^2 = g.M$, on déterminera la courbe élastique pour chaque cas donné. J'invite les Mathématiciens à perfectionner ces recherches, dont je ne donne ici qu'un léger essai.

42. Voilà les difficultés relatives à la Méchanique, qui peuvent, ce me semble, être opposées aux solutions jusqu'ici connues du problême de la courbe élastique. Mais en admettant même les principes qu'on a employés jusqu'ici pour cette solution, il me semble qu'elle est encore susceptible de quelques difficultés analytiques.

43. D'après ces principes, nommant AQ, x, QM, y (Fig. 1), on a l'équation $x = -\frac{a^2 dx ddy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}$, dans laquelle a^2 est une constante qui dépend du poids P & de l'intensité de l'action du ressort; cette équation facile à intégrer donne une valeur de dy en dx & fonction de x, laquelle renferme une constante qu'on détermine par cette condition, que, lorsque $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ est $=$ à la longueur donnée AB du ressort (que j'appelle l), $\frac{dy}{dx} = o$, c'est-à-dire, que la tangente en B est parallèle aux x. Il paroît du moins que cette condition de $\frac{dy}{dx} = o$, ou quelqu'autre analogue, est nécessaire, pour déterminer la constante; car on ne pourroit la déter-

miner par cette seule condition, que la valeur totale de $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ soit $=l$, puisqu'on peut évidemment avoir une infinité de courbes différentes dont la longueur totale $=l$, & dont l'équation soit $dy = dx\,\varphi x$; φx représentant une fonction de x, qui renferme une constante indéterminée.

44. On remarquera de plus que cette constante indéterminée est absolument indépendante de la constante a^2 qui se trouve dans l'équation différentielle, & qui dépend de l'intensité du ressort, & de la valeur du poids P; la constante dont il s'agit dépend uniquement (Fig. 1) de l'angle QAM, ou de la valeur initiale de $\frac{dy}{dx}$.

45. En effet, supposant $dy = z\,dx$, on aura $x = -\frac{a^2 dz}{dx(1+zz)^{\frac{3}{2}}}$, dont l'intégrale est $\frac{z}{\sqrt{(1+zz)}} = C - \frac{x^2}{2a^2}$; en sorte que faisant ω égal à l'angle dont z ou $\frac{dy}{dx}$ est la tangente, on aura sin. $\omega = C - \frac{x^2}{2a^2}$ & $C =$ sin Ω, Ω étant l'angle initial MAQ.

46. Nous avons déja fait voir (art. 18) que l'angle initial MAQ doit être supposé droit. Mais en le supposant d'ailleurs tout ce qu'on voudra, n'est-ce pas une supposition purement précaire, que la tangente en B soit parallèle aux x, c'est-à-dire, horisontale, & que par conséquent l'angle DBM soit droit? Ne pour-

roit-il pas être aigu? Cela paroît d'autant plus naturel à supposer, que certainement l'angle *QMA* au point *M* (pris à volonté) est aigu, & qu'il semble qu'on pourroit supposer le ressort fixément attaché en *M*, & tendu par le poids *P*, en supposant la portion *BM* supprimée, & tout le reste demeurant le même.

47. On dira peut-être, pour réformer cette supposition, que la constante doit se déterminer par la condition que la verticale *AP* touche la courbe *BMA*; ce qui donnera $z = \infty$ lorsque $x = 0$, & $C = 1$. Mais en ce cas, on trouveroit, comme il est aisé de le voir,

$$dy^2 = \frac{dx^2\left(1 - \frac{x^2}{2a^2}\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2a^2}\right)^2},$$ & lorsque $x = 0$, on auroit $dy^2 = \frac{a^2 dx^2}{x^2}$, & $dy = \frac{a\,dx}{x}$; d'où il s'ensuit, comme je l'ai démontré ailleurs (*a*), que la courbe *BMA* deviendroit alors une ligne droite dans la direction *AP* du poids *P*; c'est-à-dire, que la courbe *BMA* & la ligne *AP* doivent coïncider avec la verticale *BD* qui passe par le point fixe *B*; résultat contraire encore à l'expérience, & d'où il s'ensuivroit que le ressort *BMA*, fixé d'abord horisontalement, doit être fléchi par le poids *P*, (quelque petit qu'on suppose ce poids) à une situation rectiligne & verticale suivant *BD*.

48. On peut démontrer la même chose par l'équa-

(*a*) Voyez Mém. Acad. 1767, pag. 581; & 1769, pag. 84 & 120.

tion $s = f \log.\left(\frac{\sqrt{(1 - \cos. z)}}{\sqrt{(1 + \cos. z)}}\right) + A$, que trouve M. de la Grange dans sa savante Théorie des ressorts (Mém. de Berlin, 1769, pag. 174), en supposant que la force qui tend le ressort soit tangente en A; car cette équation donnera $\frac{s - A}{f} = \log.\left[\sqrt{\left(\frac{1 - \cos. z}{1 + \cos. z}\right)}\right]$, & $\frac{1 - \cos. z}{1 + \cos. z} = c^{2\left(\frac{s - A}{f}\right)}$, c étant le nombre dont le log. $= 1$. Or en faisant $z = 0$ & $s = 0$, c'est-à-dire, en supposant que la force tendante soit une force tangentielle en A, on aura $o = c^{-\frac{2A}{f}}$, & par conséquent A infinie; donc en faisant s finie & quelconque, mais très-petite par rapport à l'infinie A, on aura de même $c^{2\left(\frac{s - A}{f}\right)} = c^{-\frac{2A}{f}} = 0$; donc $1 - \cos. z = 0$; donc $\cos. z = 1$, & $z = 0$; donc si l'arc $s = 0$ lorsque $z = 0$, s sera tout ce qu'on voudra en supposant $z = 0$; donc la courbe BMA devient une ligne droite.

49. M. Jacques Bernoulli, dans les Mém. de l'Acad. 1705, suppose la courbe autrement disposée, & telle qu'on la voit dans la Fig. 5, & il parvient à une équation de cette forme, $dy = \frac{x^2 dx}{\sqrt{(B - x^4)}}$, où l'on voit que $x = 0$, donne selon lui $dy = 0$, & qu'ainsi l'angle MAP est droit.

50. Cette équation viendroit évidemment de l'équation différentielle $x = \frac{a^2 dz}{dx(1 + zz)^{\frac{1}{2}}}$, qui convient à ce

dernier cas. Mais pourquoi ſuppoſer que l'angle *MAP* eſt droit? l'expérience ne prouve-t-elle pas le contraire, & n'avons-nous pas même prouvé (art. 18) que cet angle doit être $=0$?

51. Il paroît s'enſuivre de-là que le problême des courbes élaſtiques (en partant des ſuppoſitions phyſiques reçues, & que nous avons examinées plus haut) eſt indéterminé, & qu'un même poids P peut par ſa tenſion former différentes courbes élaſtiques, depuis celle où la tangente en B eſt horiſontale, juſqu'à la ligne droite BD. Il ſemble pourtant, d'après l'expérience, que ce problême n'a qu'une ſeule ſolution pour une lame d'élaſticité donnée, de ſorte que l'expérience d'une part, & de l'autre la ſolution adoptée juſqu'ici, ſemblent peu d'accord.

52. C'eſt ce qui paroîtra encore plus clair, ſi on ſuppoſe que la courbe élaſtique s'écarte peu de la ligne droite; car on aura pour lors $x=$ à très-peu près $-\frac{ddy.a^2}{dx^2}$ ou $\frac{xdx^2}{a^2}=-ddy$, d'où $dy=\frac{b^2dx}{a^2}-\frac{xxdx}{2a^2}$; a étant ſuppoſé très-grand par rapport à b, & par rapport à la plus grande valeur de x, qui eſt à peu près $=l$, afin que y ſoit très-petit par rapport à x, & qu'ainſi la courbe élaſtique, ſelon l'hypothèſe, différe peu de la ligne droite.

53. Or il eſt évident qu'en changeant la valeur de b (toujours ſuppoſée très-petite par rapport à a) l'équa-

tion $ddy = -\frac{xdx^2}{a^2}$ ſubſiſte toujours, & que par conſéquent une infinité de courbes élaſtiques différentes, déterminées par la différente valeur de b, peuvent ſatisfaire à cette équation.

54. On peut encore remarquer que, ſi pluſieurs reſſorts (Fig. 6) OZA, OiA, dont l'élaſticité ſoit la même, & qui ſoient tous fixes en A, ſont tendus par un même poids P, dont la direction paſſe par A, & qu'ils ſoient de plus chacun très-peu courbés, tous ces reſſorts ſeront en équilibre avec le poids P, pourvu que $\frac{ZM}{iM}$ ſoit par-tout conſtant; car ſi dans une de ces courbes OZA, on a $y = -\frac{a^2 ddy}{dx^2}$, ($OM$ étant $= x$, & $ZM = y$) on aura la même équation pour la courbe OiA, puiſque $\frac{ddy}{y}$ y eſt la même que dans la courbe OZA.

55. Cette équation $y = -\frac{a^2 ddy}{dx^2}$ donne $y = A$ ſin. $\left(\frac{x}{a}\right)$, A étant une conſtante qui détermine les différentes courbes OZA, OiA, & comme OA eſt $=$ à très-peu près à la longueur totale du reſſort l, il s'enſuit que $\frac{l}{a}$ doit être égal à la demi-circonférence priſe un nombre entier de fois, exactement.

56. Sans cette condition, la direction du poids P

ne passera pas par le point fixe *A*, comme nous le supposons ici.

57. Si $\frac{l}{a}$ est $< \pi$, π étant la demi-circonférence, ou plutôt le rapport de la demi-circonférence au rayon, la ligne *OP* tombera dans la figure à droite du point *A*.

58. Si $\frac{l}{a} = m\pi$, *m* étant un nombre pair ou impair, la direction du poids *P* passera par *A*, & la courbe du ressort formera plusieurs ventres en nombre *m*, & coupera son axe *OP* en $m - 1$ points, outre les points *O*, *A*.

59. Si $\frac{l}{a} = m\pi + \omega$, ω étant $< \pi$, & *m* un nombre pair ou impair, (zero étant compris parmi les nombres pairs) la courbe du ressort aura *m* ventres, & coupera son axe en $m - 1$ points comme dans le cas précédent, mais la direction du poids *P* ne passera point par *A*, & tombera à droite du point *A* si *m* est pair, & à gauche si *m* est impair.

60. Mais dans tous les cas, comme dans le cas le plus simple de la Fig. 6, le ressort pourra prendre différentes figures.

61. Quant à la quantité *a*, on la déterminera dans tous les cas par l'équation $\frac{l'}{a} = \pi$, *l'* étant la valeur de *x* qui répond au point le plus proche de *O* où la courbe coupe son axe; point qui se trouvera par l'expérience.

62. Et si la courbe ne coupe pas son axe, alors soit λ la valeur de x qui répond à la plus grande valeur de y, on aura $\frac{\lambda}{a} = \frac{\pi}{2}$, équation par laquelle on déterminera a. Ceci suppose que $\frac{dy}{dx}$ soit $= 0$ en quelque point de la courbe. S'il ne l'étoit pas, alors on déterminera A & a par l'observation des angles en O & en A, dont les tangentes étant supposées $= m$, & m' donneront lorsque $x = 0$, $\frac{dy}{dx}$, ou $m = \frac{A}{a}$ cos. $\frac{o}{a} = \frac{A}{a}$, & lorsque $x = \lambda$, m' ou $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{a}$ cos. $\frac{\lambda}{a}$. Donc cos. $\left(\frac{\lambda}{a}\right) = \frac{m'}{m}$, d'où l'on tirera a; & par conséquent $A = am$.

63. J'ai cru devoir entrer dans ce détail, parce que de très-grands Géometres paroissent avoir pensé que si $\frac{l}{a}$ n'est pas $= \pi$, il n'est pas possible, même dans les principes admis jusqu'à présent sur l'action des ressorts, de déterminer la courbe élastique par le cas dont il s'agit; ils ont, ce me semble, supposé que la direction OP du poids P devoit toujours passer par le point fixe A; supposition qui ne me paroît pas nécessaire.

64. Je reviens encore un moment à la solution générale de l'art. 43, d'après les principes ordinaires. Pour se former une idée plus nette de la quantité a, on supposera $Px = \frac{Ka^2}{R}$, R étant le rayon osculateur; &

& $K\alpha^2$, une quantité conſtante, dans laquelle K repréſente un poids pris à volonté, & α une ligne droite, en ſorte que K diminuant, α augmentera & réciproquement, & que ſi on ſuppoſe $K=P$, α ſera $=a$.

65. Maintenant, en ſuppoſant $AM=s$ (Fig. 1), & $dx=ds$ coſ. ω, c'eſt-à-dire que ω ſoit l'angle des ds avec les dx, on aura $\frac{ds}{R}=-d\omega$, d'où le rayon oſculateur $R=-\frac{ds}{d\omega}$, & l'équation $\int ds$ coſ. $\omega=-\frac{a^2 d\omega}{ds}$; donc faiſant ds conſtant, on aura ds coſ. $\omega=-\frac{a^2 dd\omega}{ds}$, & (ſuppoſant $ds=rd\omega$) $d\omega$ coſ. $\omega=\frac{a^2 dr}{r^3}$; donc ſin. $\alpha-$ ſin. $\omega=\frac{a^2}{2r^2}$, α étant la valeur de ω lorſque $s=0$, & r étant $=\infty$ lorſque $s=0$, puiſque l'équation $\int ds$ coſ. ω ou $x=-\frac{a^2 d\omega}{ds}$, donne $\frac{d\omega}{ds}$ ou $\frac{1}{r}=0$ lorſque x & s ſont $=0$. Donc $ds=-\frac{a d\omega}{\sqrt{2}.\sqrt{(\text{ſin. }\alpha-\text{ſin. }\omega)}}$; équation dont l'intégration dépend de la rectification des ſections coniques.

66. Si ω eſt fort petit, ainſi que α, ſoit ſin. $\omega=x$, & ſin $\alpha=b$, on aura $ds=-\frac{a dx}{\sqrt{2}.\sqrt{(1-xx)}.\sqrt{(b-x)}}$; & comme x eſt très-petit par rapport à 1, on peut, au lieu de $\frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, mettre $1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}$, &c. ce qui rendra l'intégration très-facile.

67. Supposons $ds =$ à très-peu près $-\frac{a\,dx}{\sqrt{2}.\sqrt{(b-x)}}$; on aura l'intégrale $s = \frac{2a}{\sqrt{2}} \times [\sqrt{(b-x)}]$; & au point B où $s = l$, & où l'angle $x = 0$, (art. 43) d'après la supposition admise dans les solutions ordinaires, on aura $l = \frac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$; ce qui donne $b = \frac{l^2}{2a^2}$.

68. Supposons $\alpha = 90° - \beta$, β étant une quantité fort petite, & $\omega = 90° - \zeta$, ζ étant aussi une quantité fort petite, nous aurons sin. ω = cof. $\zeta = 1 - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^4}{2.3.4}$, &c; & de même sin. α = cof. $\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{2.3.4}$, &c. d'où $ds =$ à très-peu près $-\frac{a\,d\zeta}{\sqrt{(\beta^2 - \zeta^2)}}$; donc $\frac{\zeta}{\beta} = \text{cof.}\left(\frac{s}{a}\right)$, & ζ ou $\frac{dy}{ds} = \beta\ \text{cof.}\ \frac{s}{a}$, ou enfin $y = a\beta\ \text{fin.}\left(\frac{s}{a}\right)$, ce qui s'accorde avec l'art. 55.

69. Dans la Fig. 6 on aura de même $\int ds\ \text{cof.}\ \omega = \frac{a^2\,d\omega}{ds}$; équation qui ne differe de la précédente qu'en ce que le second membre a le signe $+$, parce qu'ici l'abscisse x proportionnelle à $\frac{1}{R}$ étant représentée par ZM, ω croît avec s, au lieu qu'il décroît dans la Fig. 1; donc $d\omega\ \text{cof.}\ \omega = -\frac{a^2\,dr}{[illegible]}$, & fin. ω — fin. α =

$\frac{a^2}{2r^2}$; d'où $ds = \frac{a\,d\omega}{\sqrt{2}.\sqrt{(\text{sin.}\,\omega - \text{sin.}\,\alpha)}}$; équation intégrable aussi par des arcs de sections coniques, ainsi que celle de l'art. 65. Ces deux équations donnent non la construction, mais la rectification de l'élastique, qu'on peut trouver aussi d'une autre maniere par l'équation de l'art. 45, $\frac{z}{\sqrt{(1+zz)}} = c - \frac{x^2}{2a^2}$, ou $\frac{dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = c - \frac{x^2}{2a^2}$, qui donne (en faisant $\frac{1}{2a^2} = 6$) $dy^2 = \frac{(c-6x^2)^2\,dx^2}{1-(c-6x^2)^2}$; & $dx^2 + dy^2 = \frac{dx^2}{1-(C-6x^2)^2}$; ou $ds = \frac{dx}{\sqrt{[1-(C-6x^2)^2]}}$, quantité qui s'intégre par des arcs de sections coniques.

70. Je ne donne pas les solutions précédentes pour exactes, puisqu'elles sont appuyées sur des principes concernant l'action des ressorts, que j'ai révoqués en doute au commencement de ce Mémoire. Mais j'ai cru devoir montrer que, même en admettant ces principes, les solutions du problême de l'élastique, données jusqu'à présent, laissoient encore à desirer, puisqu'elles laissent ou semblent laisser le problême indéterminé, & susceptible d'une infinité de solutions.

71. Je dois prévenir encore une réponse qu'on pourroit opposer aux observations que nous avons faites, art. 43 & 46, sur *l'indétermination* du problême de la courbe élastique, par les méthodes adoptées jusqu'ici; on pourroit dire que dans la Fig. 1, la tangente en

B doit être horiſontale, parce que le reſſort ne doit céder à l'action du poids *P*, que le moins qu'il eſt poſſible, & par conſéquent s'écarter le moins qu'il eſt poſſible de la ſituation horiſontale, ce qui arrivera ſi l'angle *DBA* eſt droit. En effet, ſi l'angle *DBA* étoit aigu, il eſt clair que le reſſort *BMA* feroit plus fléchi par le poids *P*, & plus écarté par conſéquent de la ſituation horiſontale. On peut ajouter que, ſi on regarde le point *M* comme fixe, le reſſort ou partie de reſſort *MA* ne changera pas à la vérité de ſituation, & que la tangente en *M* reſtera inclinée, & l'angle *QMA* aigu, mais que, ſi le poids *P* n'avoit eu d'abord à plier que la partie *MA*, la tangente en *M* eut été horiſontale, & l'angle *QMA* droit.

72. En admettant cette hypothèſe, qui pourtant ne paroît pas fondée ſur une raiſon ſolide, il faudra dire par la même raiſon, que dans la Fig. 5 la tangente en *B* doit être verticale, afin que le reſſort s'écarte le moins qu'il eſt poſſible de ſa ſituation verticale primitive.

73. Or il eſt aiſé de voir par la théorie précédente, qu'il y a une infinité de cas où la tangente en *B* ne ſauroit être verticale, puiſque par exemple, ſi la courbe *BMA* differe peu d'une ligne droite, il faut (art. 55) pour que la tangente en *B* ſoit verticale, que ſin. $\frac{x}{a}$ ou ſin. $\frac{l}{a}$ (*l* étant la longueur du reſſort) ſoit =

au ſinus total, & qu'ainſi $\frac{l}{a} = \frac{\pi}{2}$; or comme la quantité a dépend de la force du reſſort, & que l en marque la longueur, il eſt clair que cette équation ne peut avoir lieu en général, mais ſeulement dans quelques cas particuliers.

74. On pourroit cependant obſerver encore, 1°. que dans le cas dont il s'agit, ſi le reſſort eſt d'abord ſuppoſé verticalement placé, ſuivant OA (Fig. 6), & preſſé par le poids P, il eſt impoſſible qu'il fléchiſſe, & qu'ainſi il ne peut ſe courber que dans la ſuppoſition que ce reſſort ſoit d'abord un peu écarté de la verticale en $O'A$. 2°. On peut ſuppoſer que dans ce cas il ſe fléchira de maniere que la partie ou côté infiniment petit qui eſt en A, ne change point de poſition & faſſe toujours avec la verticale OA, un angle $= OAO'$, afin que le reſſort ſoit le moins fléchi qu'il eſt poſſible par l'action du poids P; en ce cas, comme on auroit toujours (art. 55) $y = A$ ſin. $\frac{x}{a}$, & au point A, $\frac{dy}{dx} = \frac{A}{a}$ coſ. $\left(\frac{l}{a}\right)$, que de plus $\frac{l}{a}$ eſt connue par la longueur & la force du reſſort, on aura la valeur de A par l'angle donné OAO'. Voilà, ce me ſemble, tout ce que la théorie juſqu'à préſent admiſe, nous permet de ſuppoſer ſur ce ſujet. Ajoutons, que de toutes les figures que le reſſort peut prendre en ce cas, celle dont il s'agit ici eſt celle qui réſulte le plus directement de la poſition initiale AO' qu'on ſuppoſe

au ressort; & observons que si $\frac{l}{a}$ est $> \pi$, la courbe en ce cas aura des nœuds, comme on l'a vu ci-dessus; mais que le petit côté initial en *A*, conservera toujours sa situation primitive suivant *AO'*. Il faut pourtant observer encore que, la situation primitive *AO'* du ressort étant donnée, la distance du point *O'* à la verticale (après la flexion du ressort), est nécessairement déterminée, puisque cette distance $= A$ sin. $\left(\frac{l}{a}\right)$, & que *A* est déja donnée (*hyp.*) par l'angle *OAO'*. Mais il est clair qu'en agrandissant l'angle *OAO'*, on agrandira la quantité *A*, & par conséquent la distance dont il s'agit, & qu'ainsi la moindre flexion possible du ressort exige que l'angle primitif *OAO'* reste le même.

75. Cette théorie, ou plutôt ces réflexions sur les courbes élastiques & sur l'action des ressorts peuvent conduire à d'autres observations ou questions sur le même sujet. On peut demander, par exemple, si un ressort *ABC* entiérement libre, & non attaché par aucun de ses points, peut (Fig. 7) être tendu par deux poids placés en *A* & en *B* (la ligne *AB* étant horisontale), & dans cet état rester en repos? Il semble que rien n'en empêche; car il paroît bien clair que, si le ressort *ABC* étoit sur un plan horisontal, & tendu en *A* & en *B* par deux puissances perpendiculaires à *AB*, il pourroit être en équilibre; or, tout restant dans le même

état, on peut substituer à ces puissances deux poids équivalens, attachés à des cordes horisontales qui passent sur des poulies ; maintenant si le systême total du ressort & des poids est supposé vertical, il paroît évident que l'équilibre doit subsister. Voilà donc un corps ABC placé verticalement, & en cet état tendu par deux poids, qui se soutient sans aucun appui. Espece de paradoxe physique, qui pourtant au fond ne l'est pas autant qu'on pourroit le croire. Dans ce cas, & en suivant la théorie ordinaire, la courbe $AMCB$ devroit nécessairement être un cercle, si les poids appliqués en A, B étoient égaux ; car on auroit suivant cette théorie $A \times AP + B \times BP = \frac{C}{R}$ ou $A \times AB = \frac{C}{R}$; donc R seroit constant. Donc, &c. Cette question mérite, ce me semble, d'être examinée par les Géometres ; la solution pourroit conduire à des résultats curieux.

76. Si un ressort $AECDB$ est tendu par une corde AB (Fig. 8), il paroît absolument nécessaire que la corde AB touche la courbe $AECDB$ en A & en B ; car il est clair que les forces qui bandent le ressort en A & en B sont dirigées suivant AB & BA ; il est clair de plus qu'en supposant le ressort inflexible, & conservant d'ailleurs toutes les forces qui tendent à le rétablir, l'équilibre subsistera ; donc la somme des forces verticales du ressort, perpendiculairement à AB,

doit être nulle, ce qui exige que ces forces ſoient dirigées les unes en haut dans la partie *DCE*, les autres en bas dans les parties *EA*, *DB*; or cela ne peut ſe faire à moins que les angles en *A* & en *B* ne ſoient infiniment obtus, & que la courbe n'ait la figure de l'art. 34. Cependant l'expérience paroît prouver que les angles *CAB*, *CBA* (Fig. 7) ſont ſouvent aigus. Comment accorder cela avec la théorie? & ſi l'on vouloit que les forces perpendiculaires à *AB* fuſſent nulles, & qu'il n'y eût abſolument que les forces parallèles à *AB*, il eſt clair que les forces du reſſort en *A* & en *B* ſeroient égales aux forces tendantes en *A* & en *B*, & qu'ainſi les autres forces devroient être nulles; autrement les forces parallèles à *AB*, qui agiroient infiniment près de *A* & de *B*, produiroient, comme il eſt aiſé de le voir (dans la direction des tangentes en *A* & en *B*, faiſant (*hyp.*) un angle fini avec *AB*) une force infinie, qui ne ſeroit détruite par aucune autre.

77. En un mot, il s'agit d'expliquer clairement comment un reſſort *ACB* tendu par une corde *AB*, eſt en équilibre ſi les angles *CAB*, *CBA* ſont aigus? Si on ſuppoſe, ce qui eſt le plus vraiſemblable, que la force du reſſort en *B* eſt dirigée ſuivant *BV* perpendiculaire à la courbe *CB*, alors les deux forces ſuivant *BV* & ſuivant *BA*, produiront une force ſuivant *BK* tangente en *B*, & il ſera aiſé de voir par la décompoſition, que cette force agiſſant le long de la courbe, produira,

produira, 1°. une force qui dans tous les points fera tangente de la courbe, & fera anéantie au point le plus élevé *C* par une force égale & contraire; 2°. une force qui agira à chaque point perpendiculairement à la courbe de dedans en dehors, c'est-à-dire, dans la direction *bm*, par exemple, au point *b*, force qui devroit produire l'effet de mouvoir le point *b* (& ainsi des autres) vers *m*, puisque cette force n'est contre-balancée par aucune autre, & que la force même du ressort agit dans le même sens; sans compter que ces forces (tant celles suivant *bm*, que celle du ressort dans le même sens) qui agiroient ainsi en *b* & dans tous les autres points de la courbe, feroient infiniment petites par rapport à la force finie qui agiroit en *B*. Maintenant si la force qui agit en *B*, au lieu d'être dirigée suivant *BV*, l'étoit suivant *BO*, par exemple, en sorte que la résultante de cette force & de la force de la corde suivant *BA* fût dirigée en sens contraire à *bk*, alors la force en *b*, comme il est aisé de le voir, seroit dirigée dans le sens contraire à *bm* & pourroit être anéantie par la force du ressort au même point; mais, 1°. on ne conçoit pas, ce me semble, aisément comment la force en *B* seroit dirigée suivant une autre ligne que *BV* perpendiculaire à la courbe *ACB*, car en regardant le ressort *ACB*, comme une suite de petites lignes droites unies par des charnieres, toutes ces petites lignes droites tendent à se remettre dans la situation rectiligne par un mouvement de rotation autour

de ces charnieres, & par conséquent perpendiculaire à chaque point de la courbe. 2°. La difficulté tirée du rapport infiniment petit des forces en *b* perpendiculaires à la courbe, à la force en *B*, suivant *BO* ou *BV*, restera la même dans ce cas, que dans le précédent. Les mêmes difficultés ont lieu ici, que pour un ressort *BA* tendu (Fig. 1) par un poids *P*, soit que le point *B* où le ressort est fixé, soit plus haut ou plus bas que le point *A* où est attaché le poids *P*. Il ne paroît pas possible dans tous ces cas d'expliquer l'équilibre & la tension du ressort d'une maniere satisfaisante, si on ne suppose que le ressort est tangent à la direction du poids. Ce qui d'un autre côté ne paroît pas s'accorder avec l'expérience. Faudroit-il, pour expliquer ce fait, en revenir à l'idée que j'ai proposée dans le Tome I de mes *Opuscules*, Ier Mémoire, pag. 13, qu'on peut regarder un corps élastique comme étant en partie roide & en partie flexible, & participant, pour ainsi dire, à-la-fois de la nature du fil & de celle du levier. En ce cas on pourroit expliquer comment les angles *CAB*, *CBA*, seroient aigus; encore faudroit-il supposer que les forces qui tendent à rétablir le ressort sont dirigées parallèlement à *AB*, & non perpendiculairement à la courbe *ACB*, puisqu'il résulteroit de cette supposition des forces perpendiculaires à *AB*, & agissant toutes dans le même sens, lesquelles ne seroient détruites par aucune autre (*a*).

(*a*) Voyez l'*Appendice* à la fin de ce Volume.

78. Voici encore quelques autres queſtions. Soient deux reſſorts rectilignes *BA*, *CA*, unis (Fig. 9) enſemble par une charnière en *A*, & qui tendent à ſe remettre en ligne droite ; on demande la loi ſuivant laquelle ils ſe mouvront? Il ne faut pas croire que le point *A* ſoit en repos ; car la ſeule action des points *B*, *C*, & des autres, pour tourner autour de *A*, produit une force centrifuge qui tend à tirer le point *A* ſuivant *AC* & ſuivant *AB*, & par conſéquent à le faire avancer en ligne droite ſuivant *AR*. On pourroit croire d'abord que le mouvement du point *A* ſuivant *AR*, peut être déterminé ſéparément du mouvement rotatoire. Mais il eſt aiſé de démontrer par mon principe de Dynamique, que ſi une force eſt appliquée en *A* ſuivant *AR*, elle produira non-ſeulement un mouvement rectiligne parallèlement à *AR* dans tous les points des verges *BA*, *AC*, mais encore un mouvement rotatoire des verges *BA*, *CA* autour de *A*. Ainſi on ne peut ſéparer la conſidération & l'analyſe des deux mouvemens, qu'on déterminera d'ailleurs par ce même principe de Dynamique.

79. En ſuppoſant dans ce même cas l'angle *BAC* infiniment obtus, on demande ſi la force rotatoire eſt meſurée par l'angle *OAC*, complément de *BAC*, ou par l'angle *CAF*, formé par la ligne *AC*, & la ligne *DAF* perpendiculaire à *AR*, & dont les reſſorts *AC*, *AB* tendent à ſe rapprocher? Il me ſemble qu'il doit être meſuré par l'angle *OAC*, puiſque c'eſt à cauſe

de cet angle que les ressorts BA, AC font effort pour se remettre en ligne droite. Il paroît même naturel de supposer que l'effort est proportionnel à cet angle, si l'angle est peu considérable. Cependant on peut en général le supposer proportionnel à une puissance de cet angle, & cette supposition sera exacte lorsque l'angle est très-petit; car l'effort est en général proportionnel à une fonction de l'angle (en faisant entrer, si l'on veut, le sinus dans cette fonction); or la fonction $\phi\alpha$ d'une quantité quelconque, est $= A\alpha^n$, lorsque la quantité α est très-petite.

80. Si le ressort BAC est libre, les côtés BA, AC tendent également (Fig. 10) à se rapprocher l'un de l'autre. Mais si le ressort AB est fixément attaché en B, alors le point B ne pouvant avoir de mouvement, il paroît que le seul ressort AC tend à se rapprocher en ligne droite de BA.

81. Mais s'il y a trois ressorts ou un plus grand nombre BA, AC, CD, le point B (Fig. 11) étant toujours fixe, je demande si le ressort AC tend à se rapprocher du ressort CD, comme il tend à se rapprocher de AB. Il paroît que AC ne pourroit tendre à se remettre en ligne droite avec CD, sans rendre plus aigu l'angle BAC. En ce cas les points D, C, A, n'auroient de tendance à la rotation qu'autour des points C, A, B, qui sont à leur gauche, & le point A, ainsi que les autres points intermédiaires à B & à D, n'auroient point de tendance à se mouvoir autour de C, &c.

des autres points placés à leur droite ; de manière que le ressort ACD ne tendroit à se rétablir que par la rotation de D autour de C, & non de A autour de C, & ainsi des autres ; ce qui paroîtroit contraire au principe assez généralement admis, qu'un ressort tend à se débander en tout sens ; & que les côtés contigus AC, CB, &c. infiniment petits ou non, tendent également à se remettre en ligne droite l'un avec l'autre ; principe qui peut-être n'est vrai, que pour les ressorts entierement libres, & qui ne semble pas avoir lieu dans les ressorts rectilignes fixes par leur extrêmité, lesquels se débandent uniquement par l'extrêmité opposée à ce point fixe, & se débanderoient par les deux extrêmités, s'ils étoient libres.

82. Je ferai à cette occasion une remarque sur le mouvement de ces sortes de ressorts, dans les deux cas. Soit un ressort rectiligne AB (Fig. 12), fixe en A, & dont la longueur naturelle soit AB ; imaginons que ce ressort soit contracté en AC, & que la force dilatative ou restitutive soit proportionnelle à la quantité de la contraction, il est clair qu'en nommant CV, x, & CB, α, on aura $ddx = A(\alpha - x)dt^2$: équation facile à intégrer. Supposons présentement que le ressort se débande des deux côtés, & que chaque extrêmité ait parcouru l'espace z au bout du temps t, alors l'équation sera $ddz = A(\alpha - 2z)dt^2$, qui donne une intégrale différente de la précédente. Ainsi le mouvement d'un ressort rectiligne est différent lorsqu'il est entierement

libre, & lorſqu'il eſt fixe par un de ſes bouts. On auroit, ce me ſemble, pu croire le contraire, & imaginer que le mouvement eſt le même dans les deux cas, parce que dans les deux cas la force reſtitutive eſt la même à longueur égale du reſſort.

83. La plûpart des queſtions que j'ai diſcutées dans cet écrit ſont (je le répete encore) plutôt des doutes propoſés aux Mathématiciens, que des aſſertions poſitives. Je me croirois récompenſé de mon travail & de mes réflexions ſur ce ſujet, ſi elles engagent les Géometres à chercher une théorie de la flexion des reſſorts & de la courbe élaſtique, qui ne ſoit ſujette à aucune difficulté.



§. II.

Sur le Calcul des Probabilités.

1. JE demande pardon aux Géometres de revenir encore fur ce fujet. Mais j'avoue que plus j'y ai penfé, plus je me fuis confirmé dans mes doutes fur les principes de la théorie ordinaire ; je defire qu'on éclairciffe ces doutes, & que cette théorie, foit qu'on y change quelques principes, foit qu'on la conferve telle qu'elle eft, foit du moins expofée déformais de maniere à ne plus laiffer aucun nuage.

2. Je fuppofe qu'il y ait n manieres différentes d'amener *croix*, & n manieres différentes d'amener *pile* ; j'amene *croix* au premier coup ; eft-il vraifemblable que l'impulfion qui me donnera encore *croix* au fecond coup, fera *précifément* la même, que celle qui me l'avoit donné au premier coup ? Il me femble que non. Or en ce cas, il n'y aura plus que $n - 1$ manieres d'amener *croix* au fecond coup, tandis qu'il y en a encore n d'amener *pile* à ce fecond coup. Il y a donc déja un peu plus de probabilité pour *pile* au fecond coup, que pour *croix*.

3. Ce raifonnement devient encore plus fort fi l'on a amené *croix* plufieurs fois de fuite. On dira peut-être que le nombre n eft infini, tant pour *croix* que pour *pile*, & qu'ainfi $n - m$ (m étant fini) eft cenfé toujours

$= n$. Il n'en sera pas moins vrai, ce me semble, que plus le nombre *m* de coups sera grand, plus il sera vraisemblable que le coup qui doit suivre, se trouvera dans la *suite* qui n'a pas encore été entamée.

4. On objecte que, s'il est très-peu probable que *croix*, par exemple, n'arrive pas 20 fois de suite, c'est qu'il y a $2^{20}-1$ combinaisons où *croix* n'arrivera pas ainsi; & que par la même raison, s'il est peu probable que le même événement n'arrive pas 20 fois de suite, c'est qu'il y a $2^{20}-1$ combinaisons pour qu'il n'arrive pas. Mais ce peu de probabilité ne viendroit-il pas aussi d'une autre raison, de ce qu'il y a dans la nature des causes continuellement agissantes, qui tendent à en changer l'état à chaque instant, & qui ne permettent pas que le même événement arrive un grand nombre de fois de suite, & même un assez petit nombre de fois? Ce raisonnement a été développé par M. Beguelin dans les Mém. de Berlin de 1767.

5. On dit: *pile* & *croix en particulier* sont également possibles. Donc pris *successivement*, ils sont aussi également possibles. La conséquence est-elle juste? Il est bien certain que, *mathématiquement* parlant, un effet quelconque ne dépend pas de ceux qui l'ont précédé, & n'a aucune influence sur ceux qui suivent, & que par cette raison on doit supposer, dans l'analyse *mathématique*, tous les effets également possibles; mais *physiquement* parlant, cela est-il vrai, & l'expérience ne prouve-t-elle pas le contraire? C'est même ce qu'on suppose

ſuppoſe dans certains calculs des probabilités où l'expérience nous a ſuffiſamment éclairés. Il eſt poſſible, par exemple, mathématiquement & même à la rigueur phyſiquement parlant, que 100 perſonnes nées enſemble, & même bien conſtituées, parviennent toutes à la vieilleſſe, puiſque chacune en particulier peut y parvenir, & même l'eſpérer. Cependant comme l'expérience nous a appris le contraire, on fonde ſur cette expérience le calcul des probabilités de la durée de la vie, & celui des tontines & des rentes viageres. Or l'expérience nous apprend de même, ce me ſemble, que jamais un même événement n'arrive un grand nombre de fois de ſuite. Pourquoi donc n'y pas avoir égard dans le calcul des probabilités?

6. Suppoſons que 2^{100} joueurs jettent une piece en l'air 100 fois de ſuite; il faut, ou que dans deux de ces ſuites de 100 jets, *croix* & *pile* ſe trouvent chacun ſans mêlange, & ſoient par conſéquent arrivés 100 fois de ſuite, ou qu'il y ait au moins deux des autres ſuites de jets (où *croix* & *pile* ſe trouvent enſemble) qui ſoient repétées. Or je crois, comme je l'ai déja dit dans le Tome IV de ces *Opuſc.* pag. 299, qu'on peut parier ſans crainte que les deux ſuites où *croix* & *pile* ſe trouveroient ſans mêlange, n'auront pas lieu, & qu'ainſi il y aura une ou deux, au moins, des autres ſuites, qui ſe trouvera répétée deux ou pluſieurs fois.

7. Il ſemble que dans le problême de Peterſbourg, & dans la plûpart des autres, il y a quelqu'eſpece de

contradiction à ajouter ensemble les espérances partielles. En effet, si on ne doit gagner, par exemple, qu'au second coup, il est clair qu'on n'aura point gagné au premier. On ne peut donc avoir à-la-fois l'espérance de gagner au premier, & l'espérance de gagner au second. Pour avoir l'espérance totale, faut-il donc ajouter les espérances partielles qui semblent s'exclure les unes les autres? Je ne veux pas conclure de-là que le résultat de cette addition ne soit pas exact; voyez Tome IV, *Opusc.* pag. 300, art. 18. Je dis seulement que sur ce point la théorie s'énonce, au moins, d'une maniere obscure & peu satisfaisante.

8. Je suppose qu'on joue à *croix* & *pile* en deux coups, & qu'on doive jouer deux coups quoi qu'il arrive. La probabilité que *croix* arrivera au premier coup, est $\frac{1}{2}$; la probabilité que *croix* arrivera au second, en supposant, comme on le fait ici, qu'on joue ce second coup dans tous les cas, est encore $\frac{1}{2}$, au moins suivant la théorie commune. Donc suivant cette même théorie, la probabilité que *croix* arrivera, au moins une fois, en deux coups, est $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, c'est-à-dire est égale à la certitude que *croix* arrivera au premier coup. Or je demande si cela est vrai, ou du moins si un pareil résultat, fondé sur de pareils principes, est bien propre à satisfaire l'esprit. Cette question est d'autant plus naturelle, que dans le problême de Petersbourg, la somme des probabilités $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. à l'infini, est en effet égale à la certitude 1, c'est-à-dire, a la certitude 1 pour

limite, comme en effet cela doit être, puiſque plus on jouera de coups, plus il eſt probable & approchant de la certitude, que *croix* arrivera. Mais par cette raiſon même la ſomme des probabilités ne devroit pas être $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ dans le cas précédent, puiſque cette ſomme ne devroit pas être $= 1$.

9. Dans ce même problême de Peterſbourg, ſuppoſons que les écus promis par l'un des joueurs à l'autre, au lieu d'être croiſſans ſuivant la progreſſion 1, 2, 4, &c. ſoient décroiſſans ſuivant la proportion 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, &c. l'eſpérance, ſuivant la théorie commune, ſera $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \&c. > \frac{1}{2}$. Or cette appréciation eſt-elle bien juſte? car ſi le jeu eſt en un ſeul coup, je ne dois donner que $\frac{1}{2}$ écu, parce que je ne puis gagner qu'un écu; dans le ſecond cas, où l'on ſuppoſe qu'on joue en pluſieurs coups, je ne dois & ne puis auſſi gagner qu'un écu; pourquoi donc cette différence de ſort?

Il eſt vrai que dans le ſecond cas je puis encore gagner quelque choſe au ſecond coup, & que dans le premier cas je ne puis rien gagner, puiſqu'il n'y a pas de ſecond coup. Mais enfin, ce que je pourrai gagner dans ce ſecond cas au ſecond coup, eſt bien moins qu'un écu; je n'ai jamais dans le cas le plus favorable, qu'un écu à eſpérer; & comme la quantité $\frac{1}{2 \cdot 4}$ qu'on ajoute à l'eſpérance $\frac{1}{2}$ du premier coup, ſuppoſe que cette eſpérance ne ſera pas réaliſée, doit-elle y être ajoutée?

10. Suppoſons que dans le problême de Peterſbourg on joue en n coups, & que tout le reſte demeurant

le même, le joueur doive recevoir 2^{n-1} écus si *croix* n'arrive qu'au n^e coup, & rien si *croix* arrive auparavant; son espérance & son enjeu, par conséquent, sera $\frac{1}{2}$, comme s'il ne jouoit qu'en un coup. Or cela est-il juste? & y a-t-il un joueur qui voulut donner seulement un demi-écu, pour recevoir 2^{50} écus si *croix* n'arrivoit qu'au bout de 51 coups?

11. Dans le VIe Volume des *Savans Etrangers*, M. de la Place fait voir aisément que si la piece a plus de penchant à tomber d'un côté que de l'autre, sans qu'on sache de quel côté (supposition très-plausible), & qu'on joue en x coups, pour deux écus au premier, pour quatre au second, pour huit au troisiéme, &c. le joueur doit donner à son antagoniste moins de x écus si $x < 5$; x écus si $x = 5$, & plus de x écus si $x > 5$. Ainsi la supposition assez vraisemblable, que la piece a plus de penchant à tomber d'un côté que de l'autre, exige que le joueur donne encore une plus grande somme, si $x > 5$, que dans la solution ordinaire du problême de Petersbourg. La difficulté est donc encore augmentée par cette supposition.

12. Mais en supposant même, comme on le fait dans tous ces jeux, que la piece ait un égal penchant à tomber des deux côtés, il est très-certain que personne ne voudroit donner 20 écus, & même au-dessous, pour jouer à ce jeu; la difficulté subsiste donc toujours sans avoir encore, ce me semble, été bien résolue, & elle ne paroît pas pouvoir l'être, tant qu'on s'en tiendra

uniquement aux principes reçus sur le calcul des probabilités.

13. On a supposé dans l'article 11 précédent, que la piece jettée en l'air a nécessairement plus de propension à tomber d'un côté que de l'autre ; cette supposition, quoiqu'assez vraisemblable, n'est cependant pas rigoureuse, & il peut se faire absolument que la piece soit construite de maniere à tomber indifféremment de l'un ou de l'autre côté ; & en général, supposons qu'il puisse y avoir tant de probabilités qu'on voudra, ω, $1-\omega$; ω', $1-\omega'$, &c. que *croix* viendra, ω', par exemple, étant $\frac{1}{2}$, si *croix* n'a pas plus de penchant à venir d'un côté que de l'autre ; en ce cas la probabilité ou l'enjeu seroit, suivant les principes ordinaires, la somme des quantités ou séries $2\omega[1+2(1-\omega)+4(1-\omega)^2$ &c.$]+2(1-\omega)(1+2\omega+4\omega^2$ &c.$)+2\omega'[1+2(1-\omega')$&c.$]$, le tout divisé par m que je suppose être le nombre des probabilités ω, $1-\omega$; ω', $1-\omega'$, &c. en sorte que si on nomme Ω la fonction $2\omega[1+2(1-\omega)$&c.$]$, l'enjeu total sera $\frac{\int \Omega d\omega}{\omega}$, depuis $\omega=0$, jusqu'à $\omega=1$. Mais la difficulté resteroit toujours la même, & l'enjeu toujours infini, comme il est aisé de le prouver, dans le cas où le nombre des coups seroit indéfini ; & plus grand même après 5 coups, que si on supposoit $\omega=$ simplement $\frac{1}{2}$. En effet, puisqu'en prenant ω quelconque depuis $\frac{1}{2}$ (exclusivement) jusqu'à 1, on a toujours l'enjeu plus petit

que le nombre n des coups si ce nombre est < 5, égal si ce nombre $= 5$, & plus grand si ce nombre est plus grand que 5, il est clair que regardant l'enjeu comme l'ordonnée d'une courbe dont [illegible] est l'abscisse, & le parametre n, cette ordonnée sera toujours $<$, ou $=$, ou $> n$, dans les cas qu'on vient de dire, & que, par conséquent, l'aire totale de la courbe divisée par l'abscisse totale correspondante (c'est-à-dire, la vraie valeur de l'enjeu) donnera une quantité qui sera $<$, ou $=$, ou $> n$.

14. Dans ce même problême de Petersbourg, il y a à parier 1 contre 1 que je ne gagnerai qu'un écu; car *croix* peut venir au premier jet, & en ce cas le jeu est fini. Cependant, si on joue en 100 coups, par exemple, il faut que je donne 50 écus à l'autre joueur. Est-il possible qu'il y ait de l'égalité dans un pareil jeu, où il faut que je donne 50 écus, où il y a à parier 1 contre 1 que je ne gagnerai qu'un écu, &, suivant la théorie ordinaire, 63 contre 1 que je ne gagnerai que 32 écus, c'est-à-dire que je ne retirerai pas ma mise? Ce seroit bien pis si on jouoit en 1000, 10000, &c. coups. Il est bien clair que la fortune plus ou moins grande du joueur ne fait rien ici, & qu'il n'y en a aucun qui voulût jouer un pareil jeu. On dira peut être que cette objection s'étendroit au cas où l'on ne joueroit qu'en deux coups, & où l'on devroit gagner 200 écus si *croix* n'arrivoit qu'au second coup. Car on trouveroit l'espérance $= \frac{1}{2} + 50$ écus; & j'avoue que dans ce cas, & même dans le précédent, on devroit donner plus de

$\frac{1}{2}$ écu, quoiqu'il y ait à parier 1 contre 1 qu'on ne gagnera qu'un écu; parce qu'on peut ici gagner 200 écus dès le second coup, & dans l'autre cas 2 écus au second, 4 au troisiéme, &c. mais il ne me paroît pas moins vrai que la théorie ordinaire a besoin d'être ici éclaircie ou modifiée. Outre les raisons apportées cidessus, nous avons encore indiqué ailleurs une autre raison assez plausible du défaut de cette théorie; c'est deregarder dans tous les cas *l'espérance* comme le produit de la somme espérée par la probabilité qu'on gagnera cette somme. Il nous paroît douteux que ce résultat soit exact si la probabilité est fort petite, & que la probabilité $\frac{1}{10000}$ de gagner 5000 écus soit la même que la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner un écu, comme il résulte des principes ordinaires. Dans ces principes, on appelle, ce me semble, mal-à-propos *l'espérance* le produit de la *somme espérée* par la probabilité; c'est la probabilité seule qui forme *l'espérance* véritable, & comme la *somme espérée*, quelque grande qu'elle soit, n'augmente pas cette *probabilité*, il me semble qu'on ne doit pas multiplier cette somme par la probabilité, pour avoir ce qu'on nomme *l'espérance* du joueur. En général, plus la probabilité de gagner est grande, plus le joueur doit donner à son adversaire, & plus la somme qu'il espere est grande, plus aussi il doit donner à ce même adversaire; mais ce qu'il doit donner, doit-il être précisément en raison directe de la somme espérée, & de la probabilité? C'est ce qu'on suppose dans l'ana-

lyſe des jeux, & ce qui ne me paroît pas inconteſtable.

15. Suppoſons que des caracteres jettés ſur un plancher donnent le mot *Conſtantinopolitanenſibus*, & qu'on demande à un ignorant ſi ces caracteres ont été jettés au haſard ou non; il répondroit qu'il y a toute apparence qu'ils ont été jettés au haſard. Mais ſi on faiſoit la même queſtion à quelqu'un qui connoîtroit l'exiſtence de *Conſtantinople*, & qui ſauroit la langue Latine, il répondroit au contraire qu'il y a tout à parier, & qu'il eſt même certain, que cet arrangement n'eſt pas l'effet du haſard. C'eſt que le premier ignore, & que le ſecond ſait que l'arrangement de ces caracteres eſt tel, qu'il a été, preſque ſûrement, l'ouvrage d'une cauſe intelligente. Il en eſt de même dans le jeu dont il s'agit. L'expérience & la connoiſſance que nous avons des loix de la nature, nous apprennent que le même événement n'arrive jamais un grand nombre de fois de ſuite; & c'eſt en vertu de cette *connoiſſance acquiſe*, que nous révoquons en doute la répétition de *croix* ou de *pile* un grand nombre de fois conſécutives. Comme tout eſt lié dans l'ordre des choſes, nous pourrions, ſi nous connoiſſions la loi de l'enchaînement des cauſes & des effets, deviner & prédire ce qui arrivera à chaque coup, ſi ce ſera *croix* ou *pile*; dans l'ignorance où nous ſommes du ſecret de la nature, nous ne pouvons dire préciſément ſi ce ſera *pile* ou *croix*; mais comme l'expérience nous a appris que le même effet ſe répete rarement, nous pouvons au moins, lorſque *croix* eſt arrivé

arrivé plusieurs fois de suite, conjecturer avec vraisemblance que *pile* viendra. Nous supposons ici qu'il n'y a point de raison particuliere tirée de la construction de la piece, pour faire arriver *croix* plutôt que *pile*; car si cela étoit, *croix* arrivant plusieurs fois de suite, pourroit rendre probable que *croix* arrivera encore.

16. M. de Buffon, dans le Tome IV de ses Supplémens à l'Histoire Naturelle, croit que la probabilité doit être regardée comme nulle, quand elle est égale à celle qu'un homme bien portant mourra dans la journée, probabilité qu'il évalue à $\frac{1}{10000}$. En conséquence la probabilité dans le problême de Petersbourg seroit nulle, selon lui, après le treiziéme coup; car au treiziéme coup, la probabilité est $\frac{1}{2^{13}} = \frac{1}{8192}$, & au quatorziéme coup, elle est $< \frac{1}{10000}$. En ce cas, l'enjeu ne seroit que 6 à 7 écus, & devroit même être encore diminué, parce que si la probabilité $\frac{1}{10000}$ doit être estimée $= 0$, les probabilités $\frac{1}{8192}$, $\frac{1}{4096}$, &c. doivent être estimées au-dessous de leur valeur. Je ne prétends ni adopter, ni rejetter cette hypothèse de M. de Buffon; je remarque seulement qu'elle confirme mes doutes sur l'égalité de possibilité de tous les cas.

17. M. de Buffon dit encore qu'ayant fait jouer 2048 fois ce jeu de *croix* & *pile*, ce qui fait 2048 parties;

les 2048 parties ont produit en tout 10057 écus, ce qui fait, dit-il, à peu près 5 écus pour chaque partie, & c'eſt à cette ſomme qu'il borne l'enjeu. Cela ſuppoſeroit qu'on joue en 10 coups; & en ce cas le joueur pourroit rattraper ſa miſe, & au-delà, dès le quatriéme coup, puiſque ſi *croix* ne venoit qu'à ce quatriéme coup, il auroit 8 écus. Mais il perdroit, ſi *croix* venoit auparavant. C'eſt aux Mathématiciens à juger de ce réſultat, ſur lequel l'incertitude de la théorie m'empêche de prononcer.

18. Voyons maintenant ſi on ne trouveroit pas un réſultat plus conforme à la vérité, en ſuppoſant que tous les cas ne ſoient pas également poſſibles, & que lorſque *pile*, par exemple, eſt arrivé une ou pluſieurs fois de ſuite, il y a lieu d'eſpérer que *croix* viendra enſuite, plutôt que *pile*, au moins ſi la piece n'a pas plus de penchant à tomber d'un côté que de l'autre.

19. Suppoſons donc que, ſi *pile* eſt arrivé au premier coup, la probabilité que *croix* arrivera au ſecond ſoit $\frac{1+a}{2}$, au lieu de $\frac{1}{2}$, a étant une quantité très-petite; que ſi *pile* eſt arrivé les deux premiers coups, la probabilité que *croix* arrivera le troiſiéme coup, eſt $\frac{1+a+b}{2}$; & ainſi de ſuite, de maniere que $a+b+c+d$, &c. ne ſoit jamais $=1$, afin que la probabilité ne devienne pas certitude abſolue. Cela poſé,

20. La probabilité que *croix* arrivera au premier coup, eſt $\frac{1}{2}$.

21. Celle qu'il n'arrivera qu'au second coup, est le produit de $\frac{1}{2}$, probabilité que *pile* arrivera au premier coup, par $\frac{1+a}{2}$, probabilité que *croix* arrivera en ce cas au second coup.

22. La probabilité que *pile* arrivera encore au second coup est $\frac{1-a}{2}$, & par conséquent la probabilité qu'il arrivera deux coups de suite est $\frac{1}{2} \times \frac{1-a}{2}$; d'où la probabilité que *croix* n'arrivera qu'au troisiéme coup, est $\frac{1}{2} \times \frac{1-a}{2} \times \frac{1+a+b}{2}$.

23. Par la même raison la probabilité que *pile* arrivera encore au troisiéme coup, est $\frac{1}{2} \times \frac{1-a}{2} \times \frac{1-a-b}{2}$, & celle que *croix* n'arrivera qu'au quatriéme coup, est $\frac{1}{2} \times \frac{1-a}{2} \times \frac{1-a-b}{2} \times \frac{1+a+b+c}{2}$.

24. Donc, puisqu'on donne (*hyp.*) au premier coup 1 écu à Pierre, au second 2, au troisiéme 4, &c. dans l'hypothèse du problême de Petersbourg, l'enjeu de Pierre sera $\frac{1}{2}[1+1+a+(1-a)(1+a+b)+(1-a)(1-a-b)(1+a+b+c)+$ &c.]

25. Donc pour un coup, l'enjeu sera $\frac{1}{2}$; pour deux coups, l'enjeu sera $\frac{1}{2}(2+a)$; pour trois coups, $\frac{1}{2}(3+a-aa+b-ba)$, &c.

26. Il est visible que, comme on a au troisiéme terme $(1-a)(1+a+b)=1-a^2+b-ba$, ce terme sera

$>$ que le ſecond, ſi $b > \frac{a+a^2}{1-a}$, c'eſt-à-dire, ſi $b >$ $a + 2a^2 + 2a^3 +$ &c. dans le cas contraire il ſera plus petit, & égal ſi $b = \frac{a+a^2}{1-a}$.

La valeur du premier terme de la ſuite eſt $\frac{1}{2}$; & elle va d'abord en augmentant, comme il eſt évident, ſa derniere valeur eſt évidemment $= 0$, parce que le facteur $1 - a - b - c - d - e - f$, &c. à l'infini $= 0$. Ainſi il y a un terme qui eſt le plus grand.

27. Mais comme chaque terme eſt poſitif (juſqu'au dernier à l'infini, qui eſt $= 0$), la ſomme des termes va toujours en augmentant.

28. Dans l'hypothèſe que nous ſuivons ici, l'enjeu, qui feroit $\frac{1}{2}(1 + 1 + 1 +$ &c.) en ſuppoſant tous les cas également poſſibles, devient (en les ſuppoſant inégalement poſſibles) $= \frac{1}{2}(1 + 1 + a + (1 - a) \times (1 + a + b) \ldots +$ &c.). Le dernier terme de cette ſuite, comme on vient de l'obſerver, eſt zero, & la ſuite 1, $1 + a$, &c. va d'abord en augmentant, c'eſt-à-dire que le ſecond terme au moins eſt > 1, ainſi la ſomme de cette derniere ſuite (ſi on ſuppoſe que la ſuite n'ait qu'un nombre fini de termes) peut être $=$, ou $>$, ou $<$ que la ſomme de la premiere $1 + 1 + 1$, &c. ſelon la loi des quantités a, b, &c. mais cette ſomme n'eſt pas pour cela égale à l'infini, lorſque le nombre des termes $= \infty$.

29. En effet, ſuppoſons que les quantités a, b, c, &c.

ſoient telles qu'on voudra, mais aſſujetties aux conditions exprimées ci-deſſus ; il eſt d'abord clair que $\frac{1+a+b+c\&c}{2} < 1$. En ſecond lieu, que $1-a-b-c-d-e$ &c. eſt $< 1-a-b-c-d$ &c, en retranchant toujours le dernier terme e.

30. D'où il ſuit qu'un terme quelconque $(1-a)(1-a-b)(1-a-b-c)(1-a-b-c-d)(1+a+b+c+d+e)$, eſt $< (1-a)(1-a-b)(1-a-b-c-d) \times 2$; & le terme ſuivant $< (1-a)(1-a-b)(1-a-b-c)(1-a-b-c-d)^2 \times 2$.

31. Soit donc m le nombre des termes juſqu'à $(1-a)(1-a-b)(1-a-b-c)(1-a-b-c-d)(1+a+b+c+d+e)$ excluſivement, & M la ſomme de ces termes, il eſt aiſé de voir qu'en nommant $1 \pm \alpha$ la quantité $(1-a)(1-a-b)(1-a-b-c-d)$, la ſomme totale de la ſérie ſera $< M +$ une progreſſion géométrique dont $1 \pm \alpha$ eſt le premier terme & le ſecond $(1 \pm \alpha) \times (1-a-b-c-d)$, ladite ſuite étant multipliée par 2 ; c'eſt-à-dire que la ſomme ſera $< M + \frac{2(1 \pm \alpha)}{a+b+c+d}$, quantité qui ſera toujours finie, & qui pourra même, ainſi que M, être ſuppoſée renfermée dans certaines limites, ſelon la ſuppoſition qu'on fera ſur la valeur & la loi des quantités très-petites a, b, c, d, &c.

32. Par exemple, ſuppoſons pour un moment que a, b, c, d, e, &c. ſoient ſi petites, qu'on puiſſe né-

gliger toutes les puissances de ces quantités, à commencer du quarré, les termes de la suite seront évidemment, en mettant à part le coefficient constant $\frac{1}{2}$ qui les multiplie tous,

$1,$
$1+a,$
$1+b,$
$1-a+c,$
$1-2a-b+d,$
$1-3a-2b-c+e,$
$1-4a-3b-2c-d+f,$

& ainsi de suite.

33. La premiere colonne verticale donnera m (nombre des termes); si on prend ensuite la somme des termes extérieurs diagonalement en descendant de gauche à droite, & qu'on les suppose égaux, on aura $a+b+c+d+e+f=a+a+a+a+a+a=(m-1)a$; & ainsi de suite; après quoi reprenant la somme des termes verticaux restans, & supposant toujours $a=b=c$, &c. la somme totale sera $m+(m-1)a-a(1+2+3+4\ldots+m-3)-a(1+2+3\ldots\ldots+m-4)-a(1+2+3\ldots\ldots+m-5)$ &c. $-a$. C'est-à-dire $m+(m-1)a-a$ multiplié par la somme des nombres triangulaires depuis 1, jusqu'à celui qui est le $(m-3)^e$, ou $-a$ multiplié par le $(m-3)^e$, nombre pyramidal.

34. Or le n^e nombre pyramidal étant $\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$, le $(m-3)^e$ est $(m-3)(m-2)\times(m-1)\times\frac{1}{2.3}$. Ainsi

la somme approchée, mais non pas rigoureusement exacte, seroit $m+(m-1)a-\frac{a(m-3)(m-2)(m-1)}{1.2.3}$ $=m+\frac{a}{2.3}(-m^3+6m^2-5m)$, qui est $<m$, si $m>5$. Il est clair aussi que

$$\frac{2.3(m-1)-(m-3)(m-2)(m-1)}{2.3}=$$

$$\frac{[6-(m-3)(m-2)](m-1)}{2.3}=\frac{(-mm+5m)(m-1)}{2.3}=$$

$\frac{-m.(m-1)(m-5)}{2.3}$. Donc l'enjeu est $<\frac{1}{2}m$ si $m>5$, est $=\frac{1}{2}m$ si $m=5$, & $>\frac{1}{2}m$ si $m<5$.

35. On voit encore que si m est très-grand, il faut supposer $am^2<6$; afin que l'enjeu ne devienne pas négatif, ce qui ne sauroit avoir lieu en aucun cas; mais ceci n'est qu'un essai de calcul imparfait pour montrer que l'enjeu, dans notre hypothèse, n'est plus infini comme dans le problême de Petersbourg.

36. Plus généralement, soit $1-a-b-c-d-e$ &c. $=\frac{1}{1+\rho z}$, z étant $=m-1$, en sorte que $a+b+c+d$ &c. $=\frac{\rho z}{1+\rho z}$, ρ étant un nombre très-petit, afin que quand $z=1$, $a+b+c+d$ &c. qui se réduit pour lors à a, soit très-petit.

37. On voit aisément que quand $z=0$, ou $m=1$, $1-a-b-c-d$, &c. $=1$, & que, quand z ou

$m = \infty$, on a $1 + a + b + c + d$, &c. $= 1 + \frac{\rho z}{1 + \rho z} =$ 2, comme cela doit être.

38. Il eſt clair qu'un terme quelconque dont le rang eſt m, ſera $= \frac{1}{1+\rho} \times \frac{1}{1+2\rho} \times \ldots\ldots \frac{1}{1+(m-2)\rho} \times \frac{1+\rho(m-1)}{1+(m-2)\rho} = \frac{1+2\rho(m-1)}{(1+\rho)(1+2\rho)\ldots\ldots(1+m\rho-\rho)}$, & que la différence de deux termes conſécutifs eſt $\frac{1}{(1+\rho)(1+2\rho)\ldots\ldots(1+m\rho-\rho)} \times \left(1 + 2\rho(m-1) - \frac{1+2\rho m}{1+\rho m}\right)$. Or ce dernier facteur eſt $= -2\rho + \rho m - 2\rho\rho m + 2\rho\rho m^2$, quantité évidemment poſitive, ſurtout lorſque m eſt très-grand.

39. Ainſi, dans cette hypothèſe, les termes vont en diminuant, à commencer du ſecond au troiſiéme terme, puiſque $m = 1$ rend la différence négative, & que $m = 2$ la rend poſitive.

39. En général, ſi on prend ω & ρ pour des quantités quelconques, ρ étant toujours très-petit, & $1 + \omega + \rho < 2$, le rapport d'un terme quelconque au précédent eſt $\frac{(1-\omega)(1+\omega+\rho)}{1+\omega}$; or ρ eſt $< 1 - \omega$, puiſque $1 + \omega + \rho < 2$; ſoit donc $\rho = \rho'(1-\omega)$, ρ' étant une fraction, on aura le rapport dont il s'agit $= \frac{1 - \omega^2 + \rho' - 2\rho'\omega + \rho'\omega^2}{1+\omega}$, cette quantité ſera $<$, ou $=$,

$=$, ou $> 1+\omega$ si $-\omega^2+\rho'-2\rho'\omega+\rho'\omega^2 \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \omega$, c'est-à-dire, si on a $\rho' \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \frac{\omega+\omega^2}{(1-\omega)^2}$.

40. Comme il faut que ρ' soit une fraction; il est clair que dans le cas où $\rho' > \frac{\omega+\omega^2}{(1-\omega)^2}$, cette derniere quantité doit être une fraction, d'où l'on tire $\omega+\omega^2<(1-\omega)^2$, ou $3\omega<1$,

41. Il est clair encore, que la quantité $\frac{1-\omega^2+\rho'(1-\omega)^2}{1+\omega}$ est d'autant plus grande, que ω est moindre, en sorte que sa plus grande valeur ou plutôt la limite de ses plus grandes valeurs se trouve en supposant $\rho'=1$ & $\omega=0$, ce qui donne 2 pour cette limite.

42. D'un autre côté, ρ' qui doit être <1, doit être >0, c'est pourquoi la limite des plus petites valeurs du rapport d'un terme quelconque au précédent, est $\frac{1-\omega^2}{1+\omega}=1-\omega$.

43. Si les quantités a, b, c, d, e, &c. (art. 19 & suiv.) vont toujours en diminuant au nombre de $m-1$, il est aisé de voir qu'en nommant ϖ leur somme, on aura $\rho<\frac{\varpi}{m-1}$. Soit donc $\rho=\frac{\rho'\varpi}{m-1}$, ρ' étant <1, & on aura $\frac{(1-\varpi)(1+\varpi+\rho)}{1+\varpi}=\frac{1-\varpi^2+\frac{\rho'\varpi(1-\varpi)}{m-1}}{1+\varpi}$, &

cette quantité sera $\lesseqgtr$ 1 selon que $\frac{\rho'\varpi(1-\varpi)}{m-1}$ sera $\lesseqgtr \varpi+\varpi^2$.

44. Donc puisque ρ' doit être <1, il faudra, si on veut que la premiere de ces quantités surpasse ou égale la seconde, que $(\varpi+\varpi^2)\times\frac{(m-1)}{\varpi(1-\varpi)}$ ou $\frac{(1+\varpi)(m-1)}{1-\varpi}$, soit une fraction, ce qui est impossible. Donc la premiere quantité ne sauroit être plus grande que la seconde, ni lui être égale; donc les termes vont en diminuant (au-delà du second) dans la série qui exprime l'enjeu. Je dis au-delà du second; car il est clair par l'art. 24, que le second sera toujours $>$ que le premier. En voilà assez pour faire voir que les termes de l'enjeu vont en diminuant dès le troisiéme coup, jusqu'au dernier. Nous avons prouvé d'ailleurs (art. 31) que l'enjeu total, somme de ces termes, est fini, en supposant même le nombre de coups infini. Ainsi le résultat de la solution que nous donnons ici du problême de Petersbourg, n'est pas sujet à la difficulté insoluble des solutions ordinaires.

45. Si $\frac{1+\gamma}{2}$ est la probabilité que *croix* viendra plutôt que *pile*, & $\frac{1+\delta}{2}$ la probabilité qu'il arrivera si *pile* a paru n coups de suite, on peut demander quelle sera la probabilité totale qui résulte de ces deux-là?

46. Ajoutera-t-on ensemble les probabilités $\frac{1+\pi}{2}$ & $\frac{1+a'}{2}$? Mais leur somme $\frac{2+a'+\pi}{2}$ seroit plus grande que l'unité, ce qui ne se peut.

Se contentera-t-on d'ajouter à la probabilité $\frac{1}{2}$ qui seroit celle de *croix* dans le cas de $\pi = 0$ & de $a' = 0$, les augmentations $\frac{a'}{2}$ & $\frac{\pi}{2}$ qu'elle reçoit par les deux suppositions données? Mais la somme $\frac{1+a'+\pi}{2}$, pourroit encore être plus grande que l'unité.

47. Enfin, ajoutera-t-on ensemble les probabilités $\frac{1+\pi}{2}$, $\frac{1+a'}{2}$, qui doivent donner *croix*, pour les diviser ensuite par la somme $\frac{1+\pi}{2}$, $\frac{1+a'}{2}$, $\frac{1-\pi}{2}$, $\frac{1-a'}{2}$ des probabilités qui doivent donner *croix* ou *pile*, c'est-à-dire par 2? En ce cas, on auroit $\frac{2+\pi+a'}{4}$, qui est < que la plus grande des deux quantités $\frac{1+\pi}{2}$, $\frac{1+a'}{2}$; au lieu qu'elle doit être plus grande que la plus grande de ces quantités.

48. On pourroit dire que la probabilité $\frac{1+a'}{2}$. que *croix* viendra, supposée ci-dessus dans le cas où *pile* est déja venu plusieurs fois de suite, n'est pas la même lorsque $\frac{1+\pi}{2}$ est la probabilité que *croix* doit tomber

plutôt que *pile*, & lorsque cette probabilité est simplement $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que *croix* peut arriver aussi-bien que *pile*. Cette observation peut être très-juste. Mais il semble au moins que la probabilité doit être, dans le cas dont il s'agit ici, $> \frac{1+r}{2}$ qui seroit la probabilité de *croix* au seul premier coup. Or je demande, d'après les principes exposés ci-dessus, de combien la probabilité $\frac{1+r}{2}$ doit être augmentée après que *pile* est tombée de suite un certain nombre de fois?

49. Dans la théorie ordinaire, & en parlant de tous les principes admis jusqu'à présent par les Géometres sur l'indifférence des événemens semblables successifs ou non successifs, lorsqu'un événement, par exemple, *croix*, est arrivé plusieurs fois de suite, & qu'on n'avoit d'ailleurs aucune raison de croire qu'il dût arriver ainsi, il est clair qu'il y a quelque probabilité que *croix* avoit plus de penchant à venir que *pile*. Mais comment estimer cette probabilité d'après la chûte successive & supposée de *croix* un certain nombre de fois de suite? Cette question a rapport à la recherche de la probabilité des causes par les événemens, dont plusieurs savans Géometres se sont occupés. Voyez dans les *Transactions philosophiques* de 1763 & 1764, les recherches de MM. Bayes & Price sur ce sujet, & celles de M. de la Place dans le VIe Volume des *Mémoires des Savans Etrangers*, présentés à l'Académie des Sciences, & imprimés en 1774.

§. III.

Sur des différentielles réductibles aux arcs de sections coniques.

1. M. Euler, dans les Tomes VIII & X des nouveaux Mém. de Petersbourg, a donné des moyens de réduire à des arcs de sections coniques la quantité $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$, f, g, h, k étant des coefficiens constans. Il est très-aisé de voir, comme je l'ai déja observé dans les Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1769, pag. 115, que cette différentielle se réduit à des arcs de sections coniques par les méthodes que j'ai données dans les Mém. de Berlin, année 1746. Je me propose donc seulement ici d'examiner les cas où ces différentielles se réduisent à la rectification de l'ellipse seule, ou de l'hyperbole seule, ou de l'ellipse & de l'hyperbole tout-à-la-fois.

2. Je remarque d'abord que f & g ne sauroient être tout-à-la-fois négatifs, non plus que h & k, puisqu'alors le radical $\sqrt{(f+gzz)}$ ou le radical $\sqrt{(h+kzz)}$ seroit imaginaire, & la différentielle impossible, ou plutôt inutile à intégrer; il faut seulement observer que f, g, h, k, pourroient être tous négatifs à-la-fois, parce qu'alors, en changeant les signes du numérateur

& du dénominateur, la quantité $\sqrt{\left(\frac{f+gzz}{h+kzz}\right)}$ seroit réelle ; ainsi, comme les signes — seroient alors changés en +, je ne compte ici que les cás suivans.

1°. Celui de f, g, h, k, tous positifs.
2°. Celui de $f+gzz$ & de $h-kzz$;
3°. Celui de $f+gzz$ & de $kzz-h$;
4°. Celui de $f-gzz$ & de $h+kzz$;
5°. Celui de $f-gzz$ & de $h-kzz$;
6°. Celui de $f-gzz$ & de $kzz-h$;
7°. Celui de $gzz-f$ & de $h+kzz$;
8°. Celui de $gzz-f$ & de $h-kzz$;
9°. Celui de $gzz-f$ & de $kzz-h$.

3. Supposons présentement $f+gzz=x$, f & g étant tous deux positifs, nous aurons $zz=\frac{x-f}{g}$; $dz=\frac{dx}{2\sqrt{g}.\sqrt{(x-f)}}$; $h+kzz=h+\frac{kx-kf}{g}$; & $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}=$ (en négligeant $2\sqrt{g}$ au dénominateur) $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-f)}.\sqrt{\left(h+\frac{kx-kf}{g}\right)}}=$ (en négligeant encore $\sqrt{g}$ au numérateur) $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(kxx+x(hg-2kf)+kff-hgf)}}$.

4. Maintenant nous avons vu dans les Mém. cités de Berlin, 1746, pag. 201 & 203, art. 15, 17 & 20, que les différentielles réductibles à des arcs d'ellipse sont de la forme $\frac{dx}{\sqrt{(+f'x-xx-g'g')}}$, f' & g' étant des

constantes (*a*), & que celles qui sont réductibles à des arcs d'hyperbole, sont de la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(xx \pm f'x - g'g')}}$ ou $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(g'g' \pm f'x - xx)}}$, avec cette différence, que la premiere de ces deux différentielles peut être intégrée par un simple arc d'hyperbole, & la seconde par un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique.

5. Dans la présente supposition, de f & g positifs, il faut pour la réduction à l'arc d'ellipse, 1°. que k soit négatif; 2°. que $hg - 2kf$ soit positif & réel; 3°. que $kff - hgf$ soit négatif; à quoi on doit encore ajouter (Mém. de Berl. 1746, pag. 201, art. 16) la condition de $f'^2 > 4g'g'$, afin que la quantité $f'x - xx - g'g' = \frac{f'^2}{4} - gg - \left(\frac{f'}{2} - x\right)^2 = \frac{f'^2}{4} - gg - \left(x - \frac{f'}{2}\right)^2$, ou $\frac{f'f'}{4} - g'g' - \left(\frac{f'}{2} - x\right)^2$ ne soit pas imaginaire, quelque valeur qu'on donne à x; ce qui arriveroit si $\frac{f'f'}{4} - gg$ étoit négatif, puisque $\left(\frac{f}{2} - x\right)^2$ ou $\left(x - \frac{f}{2}\right)^2$ est toujours positif.

2°. Dans la même hypothèse de f & g positifs, il faudra pour la réduction à l'arc simple d'hyperbole que k

(*a*) Il est bon d'observer ici que si dans les Mém. de Berlin, 1746, p. 201, art. XV, on suppose $q - 1$ négatif dans l'équation $aa + (q - 1)xx = az$, on aura $xx = \frac{aa - az}{1 - q}$, & la transformée sera toujours de la forme $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{[(qa + a)z - zz - qaa]}}$, c'est-à-dire, $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(+fz - zz - gg)}}$.

ſoit poſitif & $kff - hgf$ négatif, & pour la réduction à l'arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, il faut que k ſoit négatif, & $kff - hgf$ poſitif, le terme $x(hg - 2kf)$ étant d'ailleurs poſitif ou négatif comme on voudra ; & on remarquera que la condition de $f'f < 4g'g'$ n'eſt pas ici néceſſaire, comme dans le cas de l'ellipſe ; parce que $xx \pm f'x - g'g' = \left(x \pm \frac{f'}{2}\right)^2 - \frac{f'^2}{4} - g'g'$ & $\pm f'x - xx + g'g' = \frac{f'^2}{4} + g'g' - \left(x \pm \frac{f'}{2}\right)^2$, deux quantités qui peuvent être poſitives, au moins en ſuppoſant certaines valeurs à x.

6. Commençons par le ſecond cas, c'eſt-à-dire, par la réduction à des arcs d'hyperboles, parce que ce cas ne renferme que deux conditions, au lieu que celui de l'ellipſe, qui en renferme trois & même quatre, eſt par cette raiſon un peu plus compoſé.

7. Mais d'abord obſervons en général, que ſi on a $-f + gzz$, il faudra, dans le radical inférieur de la transformée, changer le ſigne des termes où f ſe trouve linéaire, parce qu'on aura ici $\frac{x+f}{g} = zz$, au lieu de $\frac{x-f}{g} = zz$; & que ſi on a $f - gzz$, ce qui donne $\frac{f-x}{g} = zz$, il faudra changer le ſigne du terme hgx, & le ſigne du terme hgf ; & comme le terme où eſt x n'influe point dans les conditions du ſecond cas, il s'enſuit que dans ce ſecond cas, il faudra ſimplement remarquer

remarquer qu'on a $\mp hgf$, ſavoir — dans le cas de $f+gzz$, & + dans le cas de $f-gzz$ ou $gzz-f$.

8. Donc, pour réduire le radical à la forme $\sqrt{(xx\pm f'x-g'g')}$, c'eſt-à-dire, à un ſimple arc d'hyperbole, on trouvera aiſément que, ſi l'on a $f+gzz$ ou $f-gzz$, les conditions ſeront, que k ſoit poſitif, & $kff\mp hgf$ négatif, ſavoir — dans le premier cas, & + dans le ſecond; donc (à cauſe de f poſitif) $kf\mp hg$ ſera négatif; donc 1°. dans le cas de $-hg$, il eſt clair que $-hg$ doit être négatif, puiſque kf eſt poſitif, étant formé de deux quantités poſitives f, k; donc h doit être poſitif, puiſque g eſt poſitif, & de plus hg doit être $>kf$.

9. Donc le cas de $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$ ſe réduit à un ſimple arc d'hyperbole, ſi h eſt poſitif, k poſitif, & $hg>kf$.

2°. Si on a $+hg$, ce qui arrive dans le cas de $f-gzz$, il eſt clair que la condition de $kf+hg$ négatif eſt impoſſible, ſi h eſt poſitif, & que ſi h eſt négatif, il faut que hg ſoit $>kf$. Donc $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$ ne peut ſe réduire à un ſimple arc d'hyperbole; & $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(kzz-h)}}$ ne pourroit s'y réduire, que ſi on avoit $hg>kf$, ce qui eſt impoſſible; car $f-gzz$ & $kzz-h$ devant être tous deux poſitifs, on a $\frac{f}{g}>zz>\frac{h}{k}$; donc $\frac{f}{g}>\frac{h}{k}$, & $kf>hg$.

3°. Si on a $gzz-f$, alors les conditions pour la réduction dont il s'agit, sont que k soit positif, & $kf+hg$ négatif. Donc h sera négatif, & $hg>kf$. Ce cas est représenté par $\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(kzz-h)}}$, qui sera par conséquent réductible à un simple arc d'hyperbole, si hg est $>kf$.

10. Venons maintenant au cas de la réduction à $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\pm fx-xx+gg)}}$, c'est-à-dire, au cas où la proposée doit se réduire à un arc seul d'hyperbole, combiné avec une quantité algébrique; si dans ce cas on a $f+gzz$ ou $f-gzz$, les conditions sont que k soit négatif, & $kff\mp hgf$ positif, ou $kf\mp hg$ positif; soit $k=-\omega$, il faudra que $-\omega f\mp hg$ soit positif; donc si on a $-hg$, c'est-à-dire, $f+gzz$, h doit être négatif; ce qui ne se peut, puisque k est déja négatif; ainsi le cas de $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$ ne peut se réduire à un arc seul d'hyperbole, combiné même avec une quantité algébrique. Et si on a $+hg$, c'est-à-dire $f-gzz$, alors il faut, pour que $-\omega f+hg$ soit positif, 1°. que h soit positif; 2°. que $hg>kf$. Donc la différentielle $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$ se réduit à un simple arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, pourvu que hg soit $>kf$.

11. Enfin, si on avoit $\sqrt{(gzz-f)}$, on auroit, dans le cas de la réduction dont il s'agit, k négatif, &

$kf+hg$ positif, ou $-\omega f+hg$ positif. Donc h doit être positif, & $hg>\omega f$. Donc le cas de $\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$ est encore réductible à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, si on a $hg>kf$, condition d'ailleurs indispensable pour la *réalité* de la différentielle, puisqu'on a ici $\frac{h}{k}>zz>\frac{f}{g}$, d'où $hg>kf$.

12. Donc, 1°. le cas de $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$, & celui de $\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(kzz-h)}}$, se réduisent à un simple arc d'hyperbole si hg est $>kf$. 2°. Le cas de $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$, & celui de $\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$, se réduisent, si $hg>kf$; à un arc simple d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique; & il ne peut y avoir d'autres formes que celles-là, qui dépendent de la rectification de l'hyperbole seule.

13. Venons maintenant aux différentielles $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$ réductibles à la rectification de l'ellipse, & prenons d'abord le cas où la quantité radicale est $kxx+x(hg-2kf)+kff-hgf$; c'est-à-dire, où l'on a $\sqrt{(f+gzz)}$. On voit d'abord que k doit être négatif, & $kff-hgf$ négatif, c'est-à-dire, $kf-hg$ négatif. Soit $k=-\omega$; donc $-\omega f-hg$ sera négatif. Donc h doit être positif, ou h négatif & $hg<kf$. Or

h ne fauroit être négatif, puifque k l'eft déja. Donc h doit être feulement pofitif. 3°. $hg - 2kf$ ou $hg + 2\omega f$ doit être pofitif & l'eft en effet, puifque h, g, ω, f, font tous pofitifs. 4°. Enfin la condition ci-deffus, (art. 5), de $f'f' - 4g'g'$ pofitif, doit donner encore ici une quatriéme condition, en écrivant d'abord $-k$ pour $+k$, & remarquant enfuite après ce changement, que $\frac{hg+2kf}{k} = f'$, & que $-g'g' = -\frac{kff-hgf}{k}$, cette condition fera donc $(hg + 2kf)^2 > 4k(kff + hgf)$, ou $h^2g^2 > 0$, ce qui a lieu en effet. Donc le cas de $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$ fe réduit à la rectification de l'ellipfe.

14. Si on a $\sqrt{(gzz-f)}$, la quantité qui eft fous le figne radical fera (en changeant le figne de f) $kxx + x(hg + 2kf) + kff + hgf$, & l'on a pour lors, 1°. k négatif; 2°. $kf + hg$ négatif, ou $-\omega f + hg$ négatif; & comme h ne fauroit être négatif, puifque k l'eft déja, il s'enfuit que h doit être pofitif, & que hg doit être $< kf$; 3°. Enfin $hg + 2kf$ ou $hg - 2\omega f$ doit être pofitif, ce qui ne fauroit s'accorder avec la condition de $hg + kf$, ou $hg - \omega f$ négatif, puifqu'à plus forte raifon $hg + 2kf$, ou $hg - 2\omega f$ feroit auffi négatif. Donc le cas préfent de $\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$ ne fauroit fe réduire à la rectification de l'ellipfe; & en effet, on a $\frac{h}{k} > zz > \frac{f}{g}$, ou $hg > kf$, ce qui ne fauroit s'accorder avec la condition de $hg < kf$.

15. Enfin si on a $\sqrt{(f-gzz)}$ la quantité qui est sous le signe radical sera $kxx+x(-2kf-hg)+kff+hgf$, & on a, 1°. k négatif; 2°. $kf+hg$ négatif, ou $-\omega f+hg$ négatif; & comme h ne peut être négatif, puisque k l'est déja, donc h est positif; donc hg doit être $< kf$. 3°. $-2kf-hg$ ou $+2\omega f-hg$ doit être positif; ce qui donne $hg<2kf$, condition qui suit de la précédente $hg<kf$. 4°. Enfin la condition de $f'f'-4g'g'>0$ en donnera ici une quatriéme, en observant de changer $+k$ en $-k$, & remarquant ensuite que $\frac{2kf-hg}{k}=f'$ & que $-g'g'=-\frac{kff+hgf}{k}$, ce qui donne $(2kf-hg)^2>4k(kff-hgf)$ ou $h^2g^2>0$, condition qui a toujours lieu. Donc $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$ se réduit à la rectification de l'ellipse, si $hg<kf$.

16. Donc la différentielle $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$ dépend de la rectification d'une ellipse, & la différentielle $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$, en dépend aussi, pourvu que dans ce dernier cas $hg<kf$; & il n'y a point d'autres formes que ces deux-là, qui puissent se réduire à la rectification de l'ellipse seule.

17. Quelques-unes des propositions précédentes sont aisées à démontrer d'une autre maniere & *à priori*, en considérant, 1°. que l'élément d'une ellipse est $\frac{dz\sqrt{(1+(q-1).zz)}}{\sqrt{(1-zz)}}$, en nommant q le parametre, ou

plutôt le rapport du parametre à l'axe, d'où il eſt clair que cet élément eſt en général $\frac{dz\sqrt{(1 \pm mzz)}}{\sqrt{(1-zz)}}$, m étant < 1, ſi m eſt négatif, & pouvant être tout ce qu'on voudra, ſi m eſt poſitif. Donc ſi on a $\frac{dz\sqrt{(f \pm gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$, on peut la changer en $\frac{dz\sqrt{f}}{\sqrt{h}} \times \frac{\sqrt{\left(1 \pm \frac{gzz}{f}\right)}}{\sqrt{\left(1-\frac{kzz}{h}\right)}}$ = (en faiſant $\frac{kzz}{h} = uu$) $Adu \times \frac{\sqrt{\left(1 \pm \frac{gh}{kf}uu\right)}}{\sqrt{(1-uu)}}$; donc ſi on a $+$, $\frac{gh}{kf}$ peut être tout ce qu'on voudra, & ſi on a $-$, gh doit être $< kf$.

18. De même l'élément de l'hyperbole eſt $\frac{dz\sqrt{[(q+1).zz-1]}}{\sqrt{(zz-1)}}$, ou $\frac{dz\sqrt{[(q+1).zz+1]}}{\sqrt{(zz+1)}}$, c'eſt-à-dire $\frac{dz\sqrt{(mzz \pm 1)}}{\sqrt{(zz+1)}}$, m étant toujours ≥ 1; donc ſi on a $\frac{dz\sqrt{(gzz \mp f)}}{\sqrt{(kzz \mp h)}}$, on la changera en $\frac{dz\sqrt{f}}{h} \times$ $\frac{\sqrt{\left(\frac{gzz}{f} \mp 1\right)}}{\sqrt{\left(\frac{kzz}{h} \mp 1\right)}}$ = (en ſuppoſant $\frac{kzz}{h} = uu$) $Adu \frac{\sqrt{\left(\frac{gh}{kf}uu \mp 1\right)}}{\sqrt{(uu \mp 1)}}$; donc gh doit être $> kf$.

19. Mais cette méthode démontre ſeulement la condition de $gh \geq$ ou $\leq hf$; & la méthode précédente

démontre de plus quels doivent être les ſignes des coefficiens dans les formes $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$, qui peuvent ſe réduire à un ſimple arc d'ellipſe ou d'hyperbole; ou à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique.

20. Si on nomme m' le demi-axe conjugué au demi-axe 1 ſur lequel ſont pris les u, on aura en général $q=m'^2$; donc pour l'ellipſe $m'^2-1=\pm\frac{gh}{kf}$, & pour l'hyperbole $m'^2+1=\frac{gh}{kf}$; donc dans le premier cas $m'=\sqrt{\left(1\pm\frac{gh}{kf}\right)}$, & dans le ſecond $m'=\sqrt{\left(\frac{gh}{kf}-1\right)}$.

21. Il réſulte des recherches précédentes, qu'il n'y a 1°. que les deux différentielles $\frac{dz\sqrt{(f+gzz}}{\sqrt{(h-kzz)}}$ & $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$ qui puiſſent dans tous les cas ſe réduire à la rectification d'une ſeule ſection conique; la premiere à la rectification de l'ellipſe, la ſeconde à celle de l'ellipſe ſi $hg<kf$, & à celle de l'hyperbole combinée avec une quantité algébrique, ſi $hg>kf$. 2°. On peut y ajouter la différentielle $\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$, quoiqu'elle exige la condition $hg>kf$, parce que cette condition eſt néceſſaire pour que la différentielle ſoit réelle. 3°. Enfin, les deux différentielles $\frac{dz\sqrt{(gzz+f)}}{\sqrt{(kzz+h)}}$ &

$\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(kzz-h)}}$, peuvent fe réduire à un arc fimple d'hyperbole, mais feulement dans le cas de $hg>kf$.

22. Il réfulte encore des mêmes recherches, que les différentielles réductibles à-la-fois à des arcs d'ellipfe & d'hyperbole, font

1°. $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$, fi $hg<kf$;

2°. $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(kzz-h)}}$;

3°. $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$;

4°. $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(kzz-h)}}$; cas où l'on a néceffairement $\frac{f}{g}>zz>\frac{h}{k}$, & par conféquent $hg<kf$;

5°. $\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$;

6°. $\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(kzz-h)}}$, fi $hg<kf$;

7°. Enfin $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$, fi $hg<kf$.

23. Il réfulte enfin qu'en général $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$ ne peut fe réduire, ni à la rectification de l'ellipfe feule, ni à celle de l'hyperbole feule, fi f & h font de différens fignes; & ne peut fe réduire à la rectification de l'hyperbole, combinée avec une quantité algébrique, que dans le feul cas de $\frac{gzz-f}{h-kzz}$, d'où réfulte $hg>kf$.

24.

24. Soit p un angle quelconque, il eſt clair, en faiſant coſ. $p = u$, ou ſin. $p = u$, que la quantité $dp\sqrt{(\alpha + \beta \text{ ſin. } p^2 + \gamma \text{ coſ. } p^2)}$, eſt réductible à la rectification de l'ellipſe, ſi on a $\alpha + \beta$ poſitif ou $\alpha + \gamma$ poſitif; car cette quantité ſe changera en $\frac{du}{\sqrt{(1 - uu)}} \times \sqrt{(\alpha + \beta - \beta u^2 + \gamma u^2)}$, ou $\frac{du}{\sqrt{(1 - uu)}} \times \sqrt{(\alpha + \gamma + \beta u^2 - \gamma u^2)}$, qui ſe réduit à la forme $\frac{dz\sqrt{(f \pm gzz)}}{\sqrt{(h - kzz)}}$, intégrable par la ſeule rectification de l'ellipſe, en obſervant de plus (art. 22) que ſi on a $-gzz$, il faut que $fk > gh$; d'où il réſulte, 1°. que la différentielle propoſée eſt réductible à la rectification de l'ellipſe ſeule ſi on a $\alpha + \beta$ poſitif, & $\gamma - \beta$ poſitif, ou $\alpha + \gamma$ poſitif, & $\beta - \gamma$ poſitif. 2°. Si dans le premier cas $\gamma - \beta$ eſt négatif, & $\beta - \gamma$ dans le ſecond, on doit avoir $\frac{\alpha + \beta}{-\gamma + \beta} > 1$ ou $\frac{\alpha + \gamma}{-\beta + \gamma} > 1$. On peut conſidérer au reſte, que dans l'une ou l'autre des deux formules le coefficient de u^2 ſera poſitif, puiſque ces coefficiens ſont de ſignes contraires; ainſi la ſeule condition de $\alpha + \beta$ ou $\alpha + \gamma$ poſitif eſt ici ſuffiſante. Suppoſons $\alpha + \beta$ poſitif, & $\gamma - \beta$ poſitif, ce qui donne la premiere différentielle réductible à un arc d'ellipſe, il eſt clair que $\alpha + \beta + \gamma - \beta = \alpha + \gamma$ ſera poſitif, & que $\frac{\alpha + \gamma}{\gamma - \beta}$ ſera > 1, puiſque quand même α ſeroit négatif & $= -\alpha'$, $\beta + \alpha = \beta - \alpha'$ étant poſitif (*hyp.*), on

aura $\beta > \alpha'$, & par conſéquent (à cauſe de $\gamma - \beta$ poſitif) $\gamma > \beta > \alpha'$ & $\gamma - \alpha' > \gamma - \beta$. Donc la ſeconde différentielle eſt auſſi réductible dans ce cas à un arc d'ellipſe ; ce qui doit être en effet, puiſque la premiere & la ſeconde différentielle ſont les mêmes, & ne différent qu'en ce que $u =$ coſ. p dans la premiere, & $=$ ſin. p dans la ſeconde. On prouvera à peu près de même que ſi $\alpha + \beta$ eſt poſitif, & $\gamma - \beta$ négatif, & que $\frac{\alpha + \beta}{-\gamma + \beta} > 1$, $\alpha + \gamma$ ſera poſitif, & qu'ainſi les deux différentielles ſeront également réductibles à un ſimple arc d'ellipſe.

25. Il eſt clair que la différentielle propoſée peut ſe changer en $dp\sqrt{(M + N \text{ coſ. } 2p)}$, ou en $\frac{dp'}{2}\sqrt{(M + N \text{ coſ. } p')}$, & que, pour réduire en général ces deux différentielles à la précédente, il ſuffit d'écrire dans la ſeconde coſ. $2p$, au lieu de coſ. p', & d'écrire enſuite 2 coſ. $p^2 - 1$, au lieu de coſ. $2p$; après quoi il ſera facile de voir ſi la propoſée eſt réductible à un arc d'ellipſe.

26. Si on a $dp'\sqrt{(M + N \text{ ſin. } p')}$, on fera ſin. $p' =$ coſ. q, ce qui donne coſ. $p' =$ ſin. q, $dp' = -dq$, & la transformée $-dq\sqrt{(M + N \text{ coſ. } q)}$, qui ſe réduit à la forme précédente.

27. Enfin ſi on avoit $dq'\sqrt{(M + N \text{ ſin. } p' + L \text{ coſ. } p')}$, on écrira, au lieu de N ſin. $p' + L$ coſ. p', la quantité H ſin. $(p' + A)$, ce qui eſt toujours poſſible, & enſuite

q au lieu de $p'+A$, ce qui donnera la transformée $dq\sqrt{(M+H \text{ fin. } q)}$, réductible à la forme précédente.

28. On voit au reste que, dans le cas où les différentielles dont on vient de parler, ne sont point réductibles à des arcs simples d'ellipse, elles sont au moins réductibles à des arcs de sections coniques, puisque la transformée sera toujours de la forme $\frac{du\sqrt{(f+guu)}}{\sqrt{(1-u^2)}}$, & que de plus, si on a f négatif (ou $guu-f$), & $g>f$, elle se réduit (art. 12, n°. 2) à un arc simple d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique.

29. On trouvera par une méthode semblable aux précédentes, les cas où $\frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)}\cdot\sqrt{(h+kzz)}}$ se réduit à des arcs seuls d'ellipse ou d'hyperbole. Il suffira pour cela de supposer $zz=x$, & on aura pour transformée $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(fh+gkxx+(fk+gh)x}}$, & d'appliquer à ce cas les raisonnemens précédens, en observant, comme ci-dessus, que f & g ne sauroient être tous deux négatifs à-la-fois, non plus que h & k, & que s'ils sont tous quatre négatifs, il faut changer les signes, ce qui les rendra tous positifs.

30. On trouvera par conséquent, que la proposée se réduit à la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(xx\pm f'x-gg)}}$, c'est-à-dire, à la rectification d'un arc simple d'hyperbole, si on a gk positif, & fh négatif.

Donc, 1°. si on a $f+gzz$, il faut que k soit positif, & h négatif ; c'est-à-dire, qu'on ait

$$\frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)}.\sqrt{(kzz-h)}}.$$

2°. Si on a $f-gzz$, il faut que k soit négatif, & h négatif, ce qui est impossible.

3°. Si on a $gzz-f$, il faut que k soit positif, & h positif, ce qui donne $\frac{zzdz}{\sqrt{(gzz-f)}.\sqrt{(h+kzz)}}$.

31. On voit de même que la proposée se réduit à $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\pm f'x-xx+gg)}}$, c'est-à-dire, à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, si on a gk négatif, & fh positif.

Donc, 1°. si on a $f+gzz$, k doit être négatif, & h positif. Ce cas est représenté par $\frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)}.\sqrt{(h-kzz)}}$.

2°. Si on a $f-gzz$, k doit être positif, & h positif. Ce cas est représenté par $\frac{zzdz}{\sqrt{(f-gzz)}.\sqrt{(h+kzz)}}$.

3°. Si on a $gzz-f$, k doit être négatif, & h négatif, ce qui ne se peut.

32. On voit enfin que la proposée se réduit à la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(f'x-xx-g'g')}}$, c'est-à-dire, à un simple arc d'ellipse, si on a fh & gk négatifs, & $fk+gh$ positif, & de plus $f'f'>4g'g'$.

Donc, 1°. si on a $f+gzz$, h doit être négatif, ainsi que k, ce qui ne se peut.

2°. Si on a $f-gzz$, k doit être positif, & h négatif; d'où l'on voit que la troisiéme condition de $fk+gh$ positif sera remplie, puisque fk sera positif, étant composé de deux quantités positives, ainsi que gh, formé de deux quantités négatives. Enfin, pour remplir la quatriéme condition, on observera que le radical exprimé en x, est représenté ici par $\sqrt{[-fh-gkxx+(fk+gh)x]}$, & qu'on a $f'=\frac{fk+gh}{gk}$, & $g'g'=\frac{fh}{gk}$; donc il faudra que $ffkk+2fkgh+g^2h^2$ soit $>4gkfh$ ou $(fk-gh)^2>0$, condition qui a toujours lieu. Donc on pourra réduire à un arc d'ellipse la différentielle $\frac{zzdz}{\sqrt{(f-gzz)}\cdot\sqrt{(kzz-h)}}$; on remarquera seulement qu'ici $\frac{f}{g}$ doit être $>zz>\frac{h}{k}$, & par conséquent $fk>gh$, sans quoi la différentielle seroit imaginaire.

3°. Si on a $gzz-f$, h doit être positif, & k négatif; d'où l'on voit que la troisiéme condition de $fk+gh$ positif, sera remplie, puisque f & k sont négatifs, & g, h, positifs. A l'égard de la quatriéme condition, on observera que le radical est représenté ici par $\sqrt{[-fh-gkxx+(fk+gh)x]}$, & on trouvera, comme dans le cas de $f-gzz$, que la condition se réduit à $(fk-gh)^2>0$, condition qui a toujours lieu. Donc on pourra réduire à un arc d'ellipse la différen-

tielle $\frac{zzdz}{\sqrt{(gzz-f)}.\sqrt{(h-kzz)}}$. On remarquera ſeulement que cette différentielle ne peut être réelle qu'autant qu'on aura $\frac{h}{k}>zz>\frac{f}{g}$, & par conſéquent $hg>fk$. Ce cas eſt l'inverſe du précédent, ou plutôt n'eſt proprement que le même, où l'on a mis h pour f, & k pour g, & réciproquement.

33. On peut encore prouver d'une autre maniere les propoſitions précédentes, en conſidérant que la différentielle $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(f'x-xx-g'g')}}=\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\alpha-x)}.\sqrt{(x-\beta)}}$, ce qui donne $\alpha>x>\beta$, ou $\alpha>\beta$; d'où il eſt clair que dans les différentielles $\frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)}.\sqrt{(h+kzz)}}$ réductibles à la rectification de l'ellipſe, les quantités renfermées ſous les ſignes radicaux ſeront de la forme $f-gzz$, $kzz-h$, & que $\frac{f}{g}$ doit être $>\frac{h}{k}$, puiſque $\frac{f}{g}>zz>\frac{h}{k}$; ou de la forme $h-kzz$, $gzz-f$, & que $\frac{h}{k}$ doit être $>\frac{f}{g}$; deux cas qui reviennent au même.

34. Par la même raiſon, comme la différentielle $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(xx\pm f'x-g'g')}}$, réductible à un ſimple arc d'hyperbole ſe change en $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x+\alpha)}.\sqrt{(x-\beta)}}$, il eſt clair que pour la réduction à un ſimple arc d'hyperbole, il fau-

dra que la forme ſoit ici $\frac{z^2 dz}{\sqrt{(f+gzz)}.\sqrt{(-h+kzz)}}$, ou $\frac{z^2 dz}{\sqrt{(gzz-f)}.\sqrt{(h+kzz)}}$: deux cas qui reviennent au même.

35. Donc les cas où f & h ſeroient de même ſigne ne peuvent ſe réduire à la rectification de l'ellipſe ſeule, ni de l'hyperbole ſeule.

36. Enfin, pour la réduction à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, on a $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\pm f'x-xx+g'g')}} = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\alpha-x)}.\sqrt{(\zeta+x)}}$; donc ce cas renferme les différentielles $\frac{z^2 dz}{\sqrt{(f-gzz)}.\sqrt{(h+kzz)}}$, ou $\frac{z^2 dz}{\sqrt{(f+gzz)}.\sqrt{(h-kzz)}}$. Donc les cas où f & h ſont de ſignes différens ne peuvent ſe rapporter à celui dont il s'agit ici.

37. Donc on ne peut rapporter ni à la rectification de l'ellipſe ſeule, ni à celle de l'hyperbole ſeule, ni même à celle de l'hyperbole combinée avec une quantité algébrique, le cas de $\frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)}.\sqrt{(h+kzz)}}$, non plus que celui de $\frac{zzdz}{\sqrt{(f-gzz)}.\sqrt{(h-kzz)}}$.

38. L'ellipſe dont la rectification donne l'intégrale de $\frac{z^2 dz}{\sqrt{(f-gzz)}.\sqrt{(kzz-h)}}$, ou $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{[(fk+gh)x-gkxx-fh]}}$

$= \frac{dx}{\sqrt{gk}.\sqrt{\left(\frac{fk+gh}{gk}x - xx - \frac{fh}{gk}\right)}}$, se rapporte à la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(f'x - xx - g'g')}}$. Or (Mém. de Berlin, 1746, pag. 201) les demi-axes r, g' de cette ellipse sont tels que $f'r - rr = g'g'$, & les abscisses t prises depuis le centre & sur le demi-axe r doivent être telles, que $rx = rr + \left(\frac{g'g'}{rr} - 1\right)tt$, $g'g'$ étant $= \frac{fh}{gk}$; donc $r = \frac{f'}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{ff'}{4} - g'g'\right)} = \frac{fk+gh}{2gk} \pm \sqrt{\left(\frac{(fk+gh)^2}{4ggkk} - \frac{fh}{gk}\right)} = \frac{fk+gh}{2gk} \pm \left(\frac{fk-gh}{2gk}\right) = \frac{2fk}{2gk}$, ou $\frac{2gh}{2gk} = \frac{f}{g}$, ou $\frac{h}{k}$; & rx ou $\frac{fx}{g} = r^2 + \left(\frac{g'^2}{r^2} - 1\right)t^2 = \frac{f^2}{g^2} + \left(\frac{fh.g^2}{gk.f^2} - 1\right)tt$; ou $\frac{hx}{k} = \frac{h^2}{k^2} + \left(\frac{fh.k^2}{gk.h^2} - 1\right)tt$; donc $x = \frac{f}{g} + \left(\frac{hg^2}{kf^2} - \frac{g}{f}\right)tt$, ou $x = \frac{h}{k} + \left(\frac{k^2f}{h^2g} - \frac{k}{h}\right)tt$, ou enfin, en mettant pour x sa valeur zz, $zz = \frac{f}{g} + \left(\frac{hg^2}{kf^2} - \frac{g}{f}\right)tt$, ou $zz = \frac{h}{k} + \left(\frac{k^2f}{h^2g} - \frac{k}{h}\right)tt$. A l'égard du demi-axe conjugué, il sera $\sqrt{\left(\frac{fh}{gk}\right)}$.

39. L'hyperbole dont la rectification donne l'intégrale de $\frac{zzdz}{\sqrt{(gzz+f.\sqrt{kzz-h})}}$, ou $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(gkxx+(fk-gh)x-fh)}} = \frac{dx}{\sqrt{(gk)}.\sqrt{\left(xx+\frac{fk-gh}{gk}x - \frac{fh}{gk}\right)}}$, se rapporte à la

forme

forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\pm f'x+xx-g'g')}}$. Or (Mém. Berlin, 1746, pag. 203) les demi-axes r, g' de cette hyperbole sont tels que $rr-g'g'=\pm f'r$, & les abscisses t prises depuis le centre sur l'axe r, sont telles que $t=\frac{\sqrt{(rr+rx)}}{\sqrt{\left(\frac{g'g'}{rr}+1\right)}}$; donc $r=\pm\frac{f'}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{f'f'}{4}+g'g'\right)}$ $=+\frac{fk-gh}{2gk}\pm\sqrt{\left(\frac{(fk+gh)^2}{4g^2k^2}+\frac{fh}{gk}\right)}=+\frac{fk-gh}{2gk}\pm\left(\frac{fk+gh}{2gk}\right)=\frac{f}{g}$, ou $\frac{h}{k}$, & l'abscisse t sera telle qu'on ait $t^2=\frac{\frac{f^2}{g^2}+\frac{f}{g}x}{\frac{fh}{gk}\cdot\frac{g^2}{f^2}+1}$, ou $\frac{\frac{h^2}{k^2}+\frac{h}{k}x}{\frac{fh}{gk}\cdot\frac{k^2}{h^2}+1}$; c'est-à-dire, $tt=\frac{\frac{f}{g}+zz}{\frac{hg^2}{kf^2}+\frac{g}{f}}$, ou $\frac{\frac{h}{k}+zz}{\frac{fk^2}{gh^2}+\frac{k}{h}}$; d'où l'on tirera aisément la valeur de zz; quant au demi-axe conjugué à r, il sera $\sqrt{\left(\frac{fh}{gk}\right)}$.

40. Enfin l'hyperbole dont la rectification combinée avec une quantité algébrique, donne l'intégrale de $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(g'g'\pm f'x-xx)}}$ a pour demi-axes g' & $r=\pm\frac{f'}{2}+\sqrt{\left(\frac{f'f'}{4}+g'g'\right)}$, & pour abscisses $\pm$

$\frac{\sqrt{\left(rr \pm \frac{rg'^2}{x}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{g'g'}{rr}+1\right)}}$ (Mém. Berl. 1746, pag. 203, art. 17 & 20). Donc l'hyperbole dont la rectification (combinée avec une quantité algébrique) donne l'intégrale de $\frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)}.\sqrt{(h-kzz)}}$, ou $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(fh+(gh-fk)x-gkxx)}}$ $= \frac{dx}{\sqrt{(gk)}.\sqrt{\left(\frac{fh}{gk}+\frac{gh-fk}{gk}\right)x-xx}}$, aura pour demi-axes $g'=\sqrt{\frac{fh}{gk}}$, & $r=\pm\frac{gh-fk}{2gk}+$ $\sqrt{\left(\frac{(gh-fk)^2}{4ggkk}+\frac{fh}{gk}\right)}=\frac{h}{k}$, ou $\frac{f}{g}$, & pour abscisses $\frac{\sqrt{\left(\frac{f^2}{g^2}+\frac{ffh}{ggkzz}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{fhg^2}{gkff}+1\right)}}$, ou $\frac{\sqrt{\left(\frac{h^2}{k^2}+\frac{fhh}{gkkzz}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{fh.k^2}{gkhh}+1\right)}}$, c'est-à-dire, $\frac{\sqrt{\left(\frac{f}{g}+\frac{hf}{gkzz}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{hg^2}{kff}+\frac{g}{f}\right)}}$, ou $\frac{\sqrt{\left(\frac{h}{k}+\frac{fh}{gkzz}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{fk^2}{ghk}+\frac{k}{h}\right)}}$.

41. L'hyperbole dont la rectification, combinée avec une quantité algébrique, donne l'intégrale de $\frac{dz\sqrt{(gzz-f)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$, ou $\frac{dz\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}}$, se réduit à la forme

$\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(f+x)}.\sqrt{[hg-k(x+f)]}}$ dans le premier cas, & $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(f-x)}.\sqrt{(hg-k(f-x))}}$, dans le second, c'est-à-dire, à la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\pm f'x-xx+g'g')}}$, ce qui donne, dans le premier cas $f'=\frac{hg-2kf}{k}$, $g'g'=\frac{hgf-kff}{k}$, & dans le second $f'=+\frac{2kf-hg}{k}$, $g'g'=\frac{hgf-kff}{k}$; or les demi-axes de cette derniere hyperbole (Mém. Berlin, 1746, pag. 203, art. XX) sont g' & $\frac{f'}{2}+\sqrt{\left(\frac{f'f'}{4}+g'g'\right)}$; c'est-à-dire, $\sqrt{\left(\frac{hgf-kff}{k}\right)}$, & $\pm\frac{hg\mp 2kf}{2k}+\sqrt{\left(\frac{(hg-2kf)^2}{4kk}+\frac{4hkgf-4kkff}{4kk}\right)}$ $=\pm\frac{hg\mp 2kf}{2k}+\frac{hg}{2k}=\frac{hg-kf}{k}$, ou f.

42. On trouvera de même les axes de l'ellipse & ceux de l'hyperbole simple, dont la rectification donne l'intégrale des différentielles mentionnées ci-dessus (articles 12 & 17); & il ne paroît pas nécessaire de nous arrêter plus long-temps sur cet objet.

43. Nous avons supposé pour plus de facilité dans les calculs précédens, que $f+gzz$ & $h+kzz$ étoient tous deux positifs; cependant s'ils étoient l'un & l'autre négatifs, ce qui n'empêcheroit pas le radical $\frac{\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$, ou $\sqrt{(f+gzz)}.\sqrt{(h+kzz)}$, d'être réel,

alors on pourroit encore ne pas prendre la peine de changer les ſignes ; il faudroit faire les calculs comme ci-deſſus, en ſuppoſant $f+gzz=x$ dans le premier cas, & $zz=x$ dans le ſecond, & remarquer ſeulement que dans la transformée qui en viendroit $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}}$, x ſeroit négatif, & $\sqrt{x}$ imaginaire dans le premier cas, & que dans le ſecond cette transformée demeureroit la même, de ſorte qu'en faiſant $x=-u$, dans le ſeul premier cas, on auroit $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(A-Bu+Cuu)}}$, ou $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(Bu-A-Cuu)}}$, quantité dans laquelle tout eſt réel; on feroit enſuite ſur cette transformée les mêmes raiſonnemens qu'on a faits ci-deſſus ſur la transformée en x & dx.

44. Si dans la transformée $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}}$, on avoit $A=0$, ou $C=0$, ou $BB-4AC=0$, le radical inférieur ſe ſimplifieroit, & la différentielle ne dépendroit plus que de la quadrature, & non des arcs de ſections coniques.

45. On trouvera aiſément, ſans que nous entrions dans ce détail, quels ſont les cas où les différentielles $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$, & $\frac{z^2dz}{\sqrt{(f+gzz)}.\sqrt{(h+kzz)}}$, ſe transforment de cette derniere maniere. Par exemple, ſi on avoit f, g, h, k poſitifs, & $fk=gh$, on auroit $C=0$, ce qu'il eſt aiſé de voir d'ailleurs, puiſque $zz+$

$\frac{f}{g}$ feroit $= zz + \frac{h}{k}$; ce qui fimplifieroit beaucoup le calcul ; il en feroit de même fi on avoit dans la même hypothèfe de $fk = gh$, $gzz - f$, & $kzz - h$, ou $f - gzz$ & $h - kzz$, &c. mais non, fi on avoit $gzz - f$ & $kzz + h$, ou $f - gzz$ & $kzz + h$, &c. même en fuppofant $fk = gh$; dans cette derniere fuppofition de $fk = gh$, le calcul fe fimplifieroit encore fi on avoit $f - gzz$ & $kzz - h$, parce que les radicaux fe réduiroient à $\frac{f}{g} - zz = (\sqrt{\frac{f}{g}} + z) \times (\sqrt{\frac{f}{g}} - z)$, & à $zz - \frac{h}{k} = (z + \sqrt{\frac{h}{k}}) \times (z - \sqrt{\frac{h}{k}})$, & que ces deux produits ont un divifeur commun ; la même chofe auroit lieu, fi on avoit $gzz - f$ & $h - kzz$. Mais il eft aifé de voir que ces derniers cas feroient illufoires, parce que $f - gzz$ & $kzz - h$, ainfi que $gzz - f$ & $h - kzz$, ne pourroient être tous deux réels (dans la fuppofition de $fk = gh$, ou $\frac{f}{g} = \frac{h}{k}$), que dans le feul cas de $z = \frac{f}{g} = \frac{h}{k}$, ainfi z ne pourroit être regardé comme variable.

46. On trouvera par les mêmes méthodes que ci-deffus, les cas où $\frac{dz\sqrt{(f + gzz)}}{zz\sqrt{(h + kzz)}}$ eft réductible à des arcs feuls d'ellipfe ou d'hyperbole. Il fuffit pour cela de fuppofer $\frac{1}{z} = u$, & la différentielle propofée fe réduira au cas de $\frac{dz\sqrt{(f' + g'zz)}}{\sqrt{(h' + k'zz)}}$.

47. Il en sera de même encore de la différentielle $\frac{dz}{(m+nzz)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$; car en faisant $\frac{z}{\sqrt{(m+nzz)}} = u$, elle se réduit à la forme $\frac{du\sqrt{(A+Buu)}}{\sqrt{(C+Duu)}}$.

48. Il en sera de même encore de $\frac{dp\sqrt{(\alpha+\beta\,\text{sin.}\,p^2+\gamma\,\text{cos.}\,p^2)}}{\sqrt{(\mu+\mu\,\text{sin.}\,p^2+\nu\,\text{cos.}\,p^2)}}$, divisé par sin. p^2, ou par cos. p^2; car il n'y a qu'à faire dans le premier cas sin. $p = \sqrt{(1-uu)}$, ou cos. $p = u$, & dans le second cos. $p = \sqrt{(1-uu)}$, ou sin. $p = u$, & on aura une transformée de cette forme $\frac{du}{(1-uu)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{(\alpha'+\beta'uu)}}{\sqrt{(\mu'+\gamma'uu)}}$, qui se réduit à la forme précédente.

49. Il en sera de même de $\frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)} \cdot \sqrt{(h+kzz)}}$, comme on le verra aisément en faisant $\frac{1}{z} = u$, car la transformée sera de la forme

$$\frac{uudu}{\sqrt{(A+Buu)} \cdot \sqrt{(C+Duu)}}.$$

50. Il en sera de même encore de $\frac{zzdz}{(m+nzz)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)} \cdot \sqrt{(h+kzz)}}$, comme on le verra en supposant $u = \frac{z}{\sqrt{(m+nzz)}}$, qui donne $\frac{dz}{(m+nzz)^{\frac{3}{2}}} =$

$\frac{du}{m}$, $zz = \frac{mu^2}{1-nu^2}$, & une transformée de la forme $\frac{uudu}{\surd(A+Buu).\surd(C+Duu)}$.

51. M. Euler, dans les Tomes VIII & X des nouveaux Mém. de Petersbourg, déja cités, trouve que $\frac{dz\surd(f+gzz)}{\surd(h+kzz)}$ est intégrable par des arcs de sections coniques, combinés avec des quantités algébriques, dans les cas mêmes, où nous avons dit ci-dessus que ces quantités sont intégrables par des arcs simples d'ellipse ou d'hyperbole. Cela vient de ce que par les théorêmes de M. Euler, & avant lui, du Comte Fagnani, on peut toujours trouver un simple arc d'ellipse ou d'hyperbole, qui soit égal à un autre arc de la même ellipse ou de la même hyperbole, combiné avec une quantité algébrique. Voyez les Mém. déja cités, & sur-tout le Volume VI de ces mêmes Mémoires.

52. En effet, soit, par exemple, $\frac{dz\surd(f\pm gzz)}{\surd(h-kzz)}$, l'élément d'un arc d'ellipse, & soit supposé avec M. Euler, $\frac{h-kzz}{f\pm gzz} = xx$, on aura $h-kzz = fxx \pm gzzxx$, & $\frac{h-fxx}{k\pm gxx} = zz$; donc en différentiant l'équation $h-kzz = fxx \pm gzzxx$, on aura $-kzdz - fxdx = \pm gxxzdz \pm gzzxdx$, & en divisant par xz, $\pm gd(xz) = -\frac{kdz}{x} - \frac{fdx}{z} = -\frac{kdz\surd(f\pm gzz)}{\surd(h-kzz)} -$

$\frac{fdx\sqrt{(k\pm fxx)}}{\sqrt{(h-fxx)}}$; d'où il eſt clair qu'on aura l'intégrale du dernier membre de cette équation, puiſque l'intégrale du premier membre eſt $\pm gxz + A$. Or le dernier membre eſt la ſomme de deux arcs d'ellipſe; cela eſt évident (art. 17) ſi on a $+g$; & ſi on a $-g$; il eſt clair que le premier terme étant (*hyp.*) un arc d'ellipſe, on a (art. 15) $fk > gh$, ou $\frac{f}{g} > \frac{h}{k}$; donc $\frac{k}{g} > \frac{h}{f}$; donc dans le ſecond membre kf eſt auſſi $> gh$.

53. On peut remarquer de plus que les deux ellipſes ſont ſemblables, car $\frac{\sqrt{(f\pm gzz)}}{\sqrt{(h-kzz)}} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{h}} \times \frac{\sqrt{\left(1\pm\frac{g}{f}zz\right)}}{\sqrt{\left(1-\frac{kzz}{h}\right)}}$, & $\frac{\sqrt{(k\pm gxx)}}{\sqrt{(h-fxx)}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{h}} \times \frac{\sqrt{\left(1\pm\frac{g}{k}xx\right)}}{\sqrt{\left(1-\frac{f}{h}xx\right)}}$; or $\frac{gzz}{f} = \frac{kzz}{h} \times \frac{hg}{kf}$, & $\frac{gxx}{k} = \frac{fxx}{h} \times \frac{hg}{kf}$. Donc ſi on fait $\frac{kzz}{h} = uu$, & $\frac{fxx}{h} = yy$, on aura $\frac{gzz}{f} = \frac{hg}{kf}uu$, & $\frac{gxx}{k} = \frac{hg}{kf}y^2$; donc les deux radicaux ſeront $\frac{\sqrt{(1\pm Au^2)}}{\sqrt{(1-u^2)}}$ & $\frac{\sqrt{(1\pm Ay^2)}}{\sqrt{(1-y^2)}}$. Donc, &c.

54. Il en ſera de même pour l'hyperbole, comme il réſulte, tant des théorêmes de MM. Fagnani & Euler,

Euler, que de ce que nous avons démontré nous-mêmes dans le Tome V de nos *Opuſcules*, pag. 242, & dans les Mém. de Turin, Tome IV, pag. 151 de la partie Mathématique; & nous remarquerons à cette occaſion qu'on trouvera dans les endroits cités, la maniere de faire diſparoître dans la transformée $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\pm f'x - xx + g'g')}}$, les quantités infinies, dont la différence eſt finie, & les changer en deux quantités finies.

55. Puiſque la différentielle $\frac{dz\sqrt{(f \pm gzz)}}{\sqrt{(h - kzz)}}$, qui dépend d'un ſimple arc d'ellipſe, peut ſe transformer en un autre arc de la même ellipſe, combiné avec une quantité algébrique, il eſt clair qu'on pourra opérer une transformation ſemblable ſur la différentielle $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(f'x - xx - g'g')}}$, qui réſulte de la précédente, & qui dépend auſſi d'un ſimple arc d'ellipſe. Il ſuffira pour cela de faire $zz = u$, & $\frac{h - ku}{f \pm gu} = y$, ce qui donnera $h - ku = fy \pm guy$, $u = \frac{h - fy}{k \pm gy}$, $-kdu - fdy = \pm gudy \pm gydu$, & en diviſant par $2\sqrt{(uy)}$, on aura $\pm gd[\sqrt{(uy)}] = -\frac{kdu}{2\sqrt{u}.\sqrt{y}} - \frac{fdy}{2\sqrt{y}.\sqrt{u}} = -\frac{kdu}{2\sqrt{u}} . \frac{\sqrt{(f \pm gu)}}{\sqrt{(h - ku)}} - \frac{fdy}{2\sqrt{y}} . \frac{\sqrt{(k \pm gy)}}{\sqrt{(h - fy)}}$; $= -$

$$\frac{kdu\sqrt{f}}{2\sqrt{h}.\sqrt{u}} \times \frac{\sqrt{\left(1 \pm \frac{gu}{f}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{ku}{h}\right)}} - \frac{fdy\sqrt{k}}{2\sqrt{y}.\sqrt{h}} \times \frac{\sqrt{\left(1 \pm \frac{gy}{k}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{fy}{h}\right)}}.$$

Suppoſant enſuite $1 \pm \frac{gu}{f} = t$, & $1 \pm \frac{gy}{k} = s$, on aura évidemment (article 53) deux transformées de la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(f'x - xx - g'g')}}$, qui étant combinées enſemble, donneront une intégrale algébrique. Donc, &c.

56. Nous avons prouvé dans les Mém. de Berlin, 1746, que la différentielle $\frac{du}{\sqrt{u}.\sqrt{(f+gu)}.\sqrt{(h+ku)}}$, dépend toujours d'un arc d'ellipſe & d'un arc d'hyperbole; & que $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(f+gu)}.\sqrt{(h+ku)}}$, dépend, ou des arcs de ces deux ſections coniques, ou de la rectification d'une ſeule, ſelon la nature des coefficiens f, g, h, k, c'eſt-à-dire, dans les cas où la quantité $fh + (gh + fk)u + gkuu$ peut ſe réduire, ou non, à l'une de ces trois formes, $f'u - gg - \alpha uu$, $\pm f'u - gg + \alpha uu$, $\pm fu + gg - \alpha uu$.

57. Maintenant on obſervera que la quantité $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$, ſe change (en faiſant $zz = u$, en

$$\frac{du\sqrt{(f+gu)}}{\sqrt{u}.\sqrt{(h+ku)}} = \frac{fdu}{\sqrt{u}.\sqrt{(f+gu)}\sqrt{(h+ku)}} +$$

$\frac{gdu\sqrt{u}}{\sqrt{(f+gu)}.\sqrt{(h+ku)}}$; j'appelle Adu la premiere de ces deux dernieres différentielles, & Bdu la seconde. Donc dans le cas où $\frac{dz\sqrt{(f+zz)}}{\sqrt{(h+kzz)}} = \frac{du\sqrt{(f+gu)}}{\sqrt{u}.\sqrt{(h+ku)}}$ se réduira à l'arc d'une seule section conique, il est clair que comme Adu dépend toujours de deux arcs, & Bdu tantôt de deux, tantôt d'un seul, il faudra lorsque Bdu dépend d'un seul arc, que l'un des deux arcs disparoisse dans la combinaison des quantités $Adu + Bdu$, & dans le cas où $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(h+kzz)}}$ se réduit à la rectification de deux sections coniques, & par conséquent où Bdu peut dépendre de deux arcs, il faudra qu'ils soient les mêmes que pour Adu; car sans cela, ou les arcs de la même section conique ne pourroient dans le premier cas se détruire dans $Adu + Bdu$, ou dans le second la différentielle dépendroit de deux arcs d'ellipse différens, & de deux arcs d'hyperbole différens. Sur quoi voyez les Mém. de Berlin, 1746, où cette vérité est prouvée d'une autre maniere, & par un calcul direct pour tous les cas.

58. Soit la quantité complexe, $\frac{\alpha dx}{\sqrt{x}.\sqrt{(\beta+\gamma x+\delta xx)}} + \frac{\varphi dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\beta+\gamma x+\delta xx)}}$, dans laquelle α, β, γ, δ, φ, sont des coefficiens constans, on la changera en celle-ci $\frac{\alpha dx + \varphi x dx}{\sqrt{x}.\sqrt{(\beta+\gamma x+\delta xx)}}$. Soit $\alpha + \varphi x = u$, la transformée sera de cette forme $\frac{udu}{\sqrt{(A+Bu+Cu^2+Du^3)}}$, &

pour qu'elle se réduise à la rectification d'une seule section conique, il faut, 1°. qu'elle puisse se réduire à cette forme $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(E+Fu+Guu^2)}}$, ce qui donne $A=0$; 2°. que $E+Fu+Gu^2$ se réduise à la forme $fu-gg-\alpha uu$, ou $\pm fu-gg+\alpha uu$, ou $\pm fu+gg-\alpha uu$.

59. Si on a une différentielle de cette forme $\frac{dz\sqrt{(A+Czz)}}{D+Ez\sqrt{(F+Gzz)}+Hzz}$, elle se réduira à des arcs de cercle ou à des logarithmes; il suffit pour cela de multiplier haut & bas par $D-Ez\sqrt{(F+Gzz)}+Hzz$, ce qui donnera aux termes les plus compliqués de la différentielle, cette forme

$$\frac{zdz\sqrt{(A+Czz)}\cdot\sqrt{(F+Gzz)}}{L+Mz^2+Nz^4}=\frac{zdz\sqrt{(P+Qzz+Sz^4)}}{L+Mz^2+Nz^4}.$$

Faisant ensuite $zz=u$, & faisant disparoître le radical $\sqrt{(P+Qu+Su^2)}$, on n'aura plus que des fractions rationnelles dans la différentielle.

60. Donc il en sera de même & par les mêmes raisons de du sin. u ou du cos. u multiplié par

$$\frac{\sqrt{(D'+G'\text{ cos. }2u)}}{E'+F'\text{ sin. }2u+N'\text{ cos. }2u}\times M'+P'\text{ sin. }2u+Q'\text{ cos. }2u.$$

Car soit cos. $u=x$; on aura dans le premier cas la transformée $\frac{dx\sqrt{(A+Bxx)}}{L+Nx\sqrt{(1-xx)}+Pxx}\times Q+R\times\sqrt{(1-xx)}+Sxx$, & en multipliant haut & bas par $L+Pxx-Nx\sqrt{(1-xx)}$, les termes les plus compliqués de la différentielle seront de la forme

$$\frac{x^k dx\sqrt{(A+Bxx)}.\sqrt{(1-xx)}}{G+Hxx+Fx^4}=\frac{x^k dx\sqrt{(P'+Q'xx+S'x^4)}}{G+Hxx+Fx^4},$$

k étant un nombre entier, & dans le second cas, on aura une pareille transformée en supposant sin. $u=x$. Donc, &c.

61. Voici encore d'autres différentielles réductibles à des arcs de sections coniques. Nous avons fait voir dans les Mém. de Berlin, qu'en général $x^{\frac{n}{2}}dx(\alpha+\beta x+\gamma xx)^{\frac{m}{2}}$ est réductible à de tels arcs, n & m étant des nombres impairs positifs ou négatifs. Or, soit proposée la différentielle $x^{\frac{p}{2}}dx\times\int x^{\frac{n}{2}}dx(\alpha+\beta x+\gamma xx)^{\frac{m}{2}}$, p étant un nombre pair ou impair, positif ou négatif, il est clair que l'intégrale sera $\frac{x^{\frac{p}{2}+1}}{\frac{p}{2}+1}\times\int x^{\frac{n}{2}}dx(\alpha+\beta x+\gamma xx)^{\frac{m}{2}}-\int x^{\frac{\rho}{2}}dx(\alpha+\beta x+\gamma xx)^{\frac{m}{2}}$, ρ étant un nombre pair ou impair, positif ou négatif. Or, si ρ est un nombre pair, la différentielle du second terme s'intégre par des logarithmes ou des arcs de cercle, & si ρ est un nombre impair, elle s'intégre par des arcs de sections coniques. Donc en général toute différentielle de cette forme $x^{\frac{p}{2}}dx\times\int x^{\frac{n}{2}}dx(\alpha+\beta x+\gamma xx)^{\frac{m}{2}}$, p, n, m étant pairs ou impairs, s'intégre par des arcs de sections coniques. Il n'y a que le seul cas où $\frac{p}{2}=-1$ qui ne puisse s'intégrer par cette méthode.

62. Il eſt clair qu'on peut trouver par cette méthode, & par les formules des Mém. de Berlin, de 1746 & 1748, une très-grande quantité de différentielles de la forme $Xdx\int\xi dx$, qui ſeront réductibles à des arcs de ſections coniques, en ſuppoſant $\int\xi dx$ réductibles à de tels arcs. Nous nous contentons d'indiquer la méthode dont il eſt très-facile de faire uſage, & nous nous bornerons ici à dire que, ſi $\int\xi dx$ eſt réductible à des arcs de ſections coniques, & que $\int\xi dx(ax+b)^q$ le ſoit auſſi, a, b étant quelconques, & q un nombre entier ou fractionnaire, poſitif ou négatif, la quantité $Xdx\int\xi dx$ ſera auſſi intégrable par des arcs de ſections coniques, ſi X peut être réſolu en différens termes de la forme $x^r(a'x+b')^{q'}$, r étant un nombre entier poſitif; & ainſi du reſte.

63. On trouvera de même que $x^{\frac{q}{2}}\times[\int x^{\frac{p}{2}}dx \times \int x^{\frac{n}{2}}dx(\alpha+\beta x+\gamma xx)^{\frac{m}{2}}]$ eſt réductible à des arcs de ſections coniques, q, p étant des nombres pairs ou impairs; & on pourra étendre cette recherche beaucoup plus loin.

64. Nous avons fait voir dans les Mém. de Berlin, de 1746, pag. 211, art. XXIX, que la différentielle $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\surd(a+bx+cxx)}$ ne dépend que de $\frac{dx\surd x}{\surd(a+bx+cxx)}$; d'où il s'enſuit que ſi $\surd(a+bx+cxx)$ eſt de la forme $\surd(fx-xx-gg)$, ou $\surd(xx-gg\pm fx)$, ou $\surd(gg\pm fx-xx)$, la différentielle

$\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{(a+bx+cxx)}}$ ne dépendra que de la rectification de l'ellipse dans le premier cas, & dans le second, de celle de l'hyperbole; d'où il s'ensuit qu'une différentielle de cette forme $\frac{Adx}{x^{\frac{5}{2}}}\times\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}$, ne dépendra que de la rectification de l'ellipse ou de celle de l'hyperbole, si $a+bx+cxx$ a l'une des formes susdites; en effet, l'intégrale sera de cette forme, $\frac{B}{x^{\frac{3}{2}}}\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}+C\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(a+bx+cxx)}}$. Donc, &c.

65. Il en seroit de même, & par les mêmes raisons, si on avoit à intégrer en général $\frac{Adx}{x^{\frac{p}{2}}}\times\int\frac{x^{\frac{q}{2}}dx}{\sqrt{(a+bx+cxx)}}$, $a+bx+cxx$ ayant les susdites conditions, p & q étant des nombres entiers, pairs ou impairs, & $\frac{q}{2}-\frac{p}{2}+1$ étant $=-\frac{3}{2}$, ou $+\frac{1}{2}$; c'est-à-dire, $\frac{q}{2}$ étant $=\frac{p}{2}-1-\frac{3}{2}$, ou $\frac{p}{2}-\frac{1}{2}$. On remarquera seulement que p ne sauroit être $=-2$, parce qu'alors $\frac{dx}{x^{\frac{p}{2}}}$ ne seroit intégrable que par logarithmes.

66. M. le Comte Fagnani, & après lui M. Euler, ont fait voir que $\frac{dx\sqrt{(1-nxx)}}{\sqrt{(1-xx)}}$ étant la différentielle

d'un arc d'ellipse, dans laquelle 1 est le demi-axe, x l'abscisse, $n = 1 - q$, q étant le demi-parametre du demi-axe 1, si on fait $\frac{\sqrt{(1 - nxx)}}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{1}{u}$, ce qui donne $\frac{\sqrt{(1 - nuu)}}{\sqrt{(1 - uu)}} = \frac{1}{x}$, on aura $\int \frac{dx\sqrt{(1 - nxx)}}{\sqrt{(1 - xx)}} + \int \frac{du\sqrt{(1 - nuu)}}{\sqrt{(1 - uu)}} = nxu + A$, A étant une constante. Voyez nouv. Mém. de Petersb. Tom. VI. Maintenant l'équation $\frac{1 - nxx}{1 - xx} = \frac{1}{u^2}$, donne, comme il est aisé de le voir, $1 - nxx = \frac{1 - n}{1 - nuu}$; d'où il s'ensuit que $\log. (1 - nxx) = \log. (1 - n) - \log. (1 - nuu)$. Donc si on avoit à intégrer une quantité de cette forme $\int \frac{dx\sqrt{(1 - nxx)}}{\sqrt{(1 - xx)}} \times M \log. (1 - nxx) B$, il est clair qu'en combinant ensemble les deux différentielles $\frac{dx\sqrt{(1 - nxx)}}{\sqrt{(1 - xx)}} \times M \log. (B - Bnxx) = \frac{Mdu\sqrt{(1 - nuu)}}{\sqrt{(1 - uu)}} \times \log. (B - Bnuu)$, elles deviendroient $\frac{dx\sqrt{(1 - nxx)}}{\sqrt{(1 - xx)}} \times M \log. (B^2 - B^2 n) - nd(xu)$ $\log. (B - Bnuu)$; or, en intégrant par parties, & mettant pour xu sa valeur en u, puis faisant $uu = z$, tout se réduit à des arcs de sections coniques. Si n étoit négatif, en sorte que l'élément de l'ellipse fût $\frac{dx\sqrt{(1 + nxx)}}{\sqrt{(1 - xx)}}$, il faudroit

faudroit mettre log. $(1+nxx)$ au lieu de log. $(1-nxx)$; & le résultat seroit d'ailleurs le même.

67. Si on fait $1-nxx=z$ ou $1+nxx=z$, on aura $xx=\frac{1-z}{n}$, ou $\frac{z-1}{n}$, & $\frac{dx\sqrt{(1\mp nxx)}}{\sqrt{(1-xx)}}$ sera $-\frac{dz\sqrt{z}}{2\sqrt{(1-z)}.\sqrt{(n-1+z)}}$, ou $\frac{dz}{2\sqrt{(z-1)}.\sqrt{(n+1-z)}}$; de plus l'équation $\frac{\sqrt{(1\mp nxx)}}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{1}{u}$, donnera [en faisant $\sqrt{(1\mp nuu)}=\sqrt{t}$] $\frac{\sqrt{z}.\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1+z)}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(1-t)}}$, ou $\frac{\sqrt{z}.\sqrt{n}}{(n+1-z)}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(t-1)}}$; d'où l'on tire en réduisant $tz=1-n$, ou $tz=n+1$; donc si on a la quantité $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(1-z)}.\sqrt{(n-1+z)}}\times\int\frac{dz}{z}$ à intégrer, on pourra parvenir à un résultat semblable à celui de l'article 66.

68. Soit $Auuxx+Buu+Cxx+D=0$, on aura, en différentiant $A(xdu+udx)+B\int\frac{du}{x}+C\int\frac{dx}{u}=0$, $u=\sqrt{\left(\frac{-D-Cxx}{Axx+B}\right)}$, & $x=\frac{\sqrt{(-D-Buu)}}{\sqrt{(Auu+C)}}$; où il faut remarquer qu'on ne peut supposer à-la-fois D & C négatifs, ni D & B négatifs; donc si on a deux quantités de cette forme $\frac{dx\sqrt{(Axx+B)}}{\sqrt{(-D-Cxx)}}+\frac{du\sqrt{(Auu+C)}}{\sqrt{(-D-Buu)}}$ à intégrer, on pourra en venir à bout par une méthode semblable à

celle du Comte Fagnani; & comme en général nous avons vu que $\frac{dx\sqrt{(f+gxx)}}{\sqrt{(k+kxx)}}$ est réductible à des arcs de sections coniques, il s'ensuit qu'on pourroit peut-être tirer de-là une méthode pour comparer entr'eux non-seulement des arcs d'ellipse & des arcs d'hyperbole séparément, mais des arcs d'ellipse & d'hyperbole pris ensemble. C'est une recherche que j'abandonne à d'autres Mathématiciens.

69. Si dans l'équation $Auuxx+Buu+Cxx+D=0$, u & x entrent de la même maniere, c'est-à-dire, si $C=B$, la valeur de u en x sera semblable à celle de x en u, & on aura encore $\int xdu+\int udx$, ou $\int\frac{dx\sqrt{(-D-Bxx)}}{\sqrt{(Ax^2+B)}}+\int\frac{du\sqrt{(-D-Bu^2)}}{\sqrt{(Au^2+B)}}=xu$, d'où l'on peut tirer encore de nouveaux théorêmes.

70. En général, soit $Au^mx^m+Bx^m+Cu^m+D=0$, & supposons $B=C$, afin que les u & les x entrent de la même maniere dans l'équation, on aura $u^m=\frac{-D-Bx^m}{Ax^m+B}$ & $x^m=\frac{-D-Bu^m}{Au^m+B}$; de sorte qu'on pourra comparer par cette méthode les arcs d'une courbe, si ces arcs sont $\int\frac{dx}{u}$ & $\int\frac{du}{x}$ ou $\int udx$ & $\int xdu$.

71. On sait que la différentielle

$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+6x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}}$ est réductible à des arcs de sections coniques. On sait de plus que si on a l'équa-

tion $\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}} =$ $\frac{dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4)}}$, on peut trouver (voyez Mém. de Peterſbourg & de Turin) une équation algébrique entre x & y; il ſemble qu'on pourroit encore tirer de-là quelques théorêmes pour comparer entr'eux des arcs de ſections coniques.

72. Suppoſons un cercle dont a ſoit le rayon, & x l'abſciſſe priſe depuis le centre, l'arc de la trochoïde de ce cercle, tant ſimple, qu'allongée ou accourcie, aura pour élément $\sqrt{\left(\frac{n^2a^2dx^2+x^2dx^2}{aa-xx}\right)} =$ $\frac{ndx\sqrt{\left(a^2+\frac{x^2}{n^2}\right)}}{\sqrt{(aa-x^2)}}$, qui eſt évidemment égal à un arc d'ellipſe, dans laquelle $n^2 = \frac{p-2a}{2a}$, p étant le parametre de l'axe $2a$.

73. Dans une trochoïde d'ellipſe, ſuppoſant $\frac{p-2a}{2a} = m$, on aura pour l'élément de l'arc $\frac{\sqrt{(n^2a^2dx^2+n^2m^2x^2dx^2+x^2dx^2)}}{\sqrt{(aa-xx)}} = \frac{ndx\sqrt{\left[aa+m^2x^2+\frac{x^2}{n^2}\right]}}{\sqrt{(aa-xx)}}$, égal à un arc d'ellipſe dans laquelle $\frac{p-2a}{2a} = m^2 + \frac{1}{n^2}$.

74. Dans la cycloïde allongée ou accourcie, l'élé-

ment de l'arc eſt $=\sqrt{\left(\frac{(n^2dx+xdx)^2}{aa-xx}+dx^2\right)}=$ $\frac{dx\sqrt{(n^2a^2+2nax+a^2)}}{\sqrt{(aa-xx)}}$. Soit $n^2a^2+2nax+a^2=az$, on aura $x=\frac{az-aa-n^2a^2}{2na}$, & la transformée ſera de la forme $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{[4nna^4-a^4(1+n^2)^2-aazz+2a^3(1+nn)z]}}$, dans laquelle le terme affecté de z eſt poſitif, le terme affecté de zz négatif, & le terme conſtant négatif, puiſque $2n$ eſt toujours $<1+n^2$, la quantité $(1-2n+n^2)$ $=(1-n)^2$ étant toujours poſitive. On voit donc que la rectification des cycloïdes allongées ou accourcies, ſe réduit à la forme $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(fz-bb-zz)}}$, qui dépend de la rectification de l'ellipſe ſeule. Ce qu'on ſavoit d'ailleurs.

75. Dans les Mém. de l'Acad. de 1708, pag. 88, on trouve que la rectification des épycycloïdes, tant allongées qu'accourcies, ſe réduit à l'intégration de la formule $\frac{dx\sqrt{[(a+c)^2-2cx]}}{\sqrt{(2ax-xx)}}=\frac{dx\sqrt{[(a+c)^2-2cx]}}{\sqrt{[a^2-(a-x)^2]}}$, ſi donc on fait $(a+c)^2-2cx=2cz$, ce qui donne $x=\frac{(a+c)^2}{2c}-z$, la différentielle deviendra

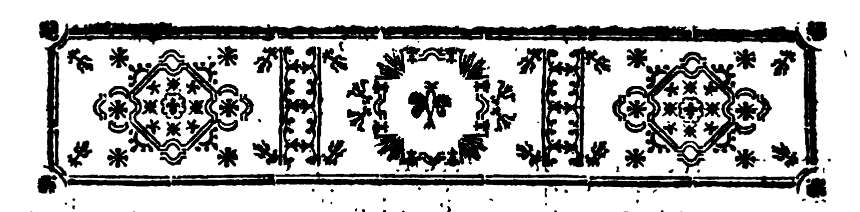
$$\frac{dz\sqrt{2c}.\sqrt{z}}{\sqrt{\left[a^2-\left(z-\frac{aa-cc}{2c}\right)^2\right]}},$$ qui ſe réduit évidemment

à la forme $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(fz-gg-zz)}}$, puiſque a^2 eſt évidemment

$< \frac{(a^2+c^2)}{2c}$, $a^4 - 2aacc + c^4$ étant toujours une quantité positive. Ainsi la différentielle proposée se réduit, comme on sait d'ailleurs, à la rectification de l'ellipse.

76. En général, soit la quantité à intégrer $\frac{dx\sqrt{(b \pm x)}}{\sqrt{(a+cx+exx)}}$, & soit $b \pm x = z$, on aura pour transformée $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(a \mp cb + eb^2 \pm cz + ezz - 2ezb)}}$. Soit $c = 0$, ce qu'on peut toujours supposer, & qui ne rendra pas la différentielle plus compliquée, la transformée sera $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(a+eb^2-2ezb+ezz)}}$, réductible à la rectification de l'ellipse, si e est négatif, b négatif, & $a + eb^2$ négatif; & ainsi du reste. Voyez les Mémoires de Berlin, 1746.





LIII. MÉMOIRE.

Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques.

L'EXCELLENT Mémoire de M. de la Grange sur ce sujet, imprimé dans les Mém. de l'Acad. de Berlin, pour l'année 1773, m'a fait repenser encore au problême de l'attraction des sphéroïdes elliptiques; dont je m'étois déja fort occupé dans le VI[e] Volume de mes *Opuscules*. Voici le résultat de mes nouvelles recherches sur cet objet. Comme elles sont une suite de celles du Volume précédent, je supposerai qu'on ait sous les yeux ce Volume & les Figures qui s'y rapportent.

§. I.

Démonstration d'un théorême de M. Maclaurin.

1. Ce théorême est celui sur lequel j'avois formé quelques doutes dans le Volume cité, pag. 242 & 243, mais simplement des doutes, parce que l'analyse

que j'avois suivie ne me paroissoit pas conduire à ce théorême. Ayant depuis examiné la chose plus attentivement, j'ai trouvé que cette analyse donnoit en effet, & même assez facilement, le théorême dont il s'agit, & j'en fis part à M. de la Grange, le 15 Septembre 1775, comme on le peut voir aux pages 308 & 312 des Mém. de l'Académie de Berlin, pour l'année 1774. Mais n'ayant fait qu'indiquer dans ce Volume la méthode analytique, par laquelle je suis parvenu à la démonstration de ce théorême, je crois devoir la développer ici dans tout le détail qu'elle exige, & y joindre même quelques autres remarques relatives à cette proposition.

2. Soit donc (Tom. VI, *Opusc*, p. 233) $\omega^2 - \gamma^2 = k^2$; & le calcul de l'attraction d'un sphéroïde elliptique sur un point placé dans son axe, se réduira à l'intégration de la quantité $\frac{2c\,dZ \times dz' \sin. z' \cos. z' \sqrt{(1 + k^2 \sin. z'^2)}}{1 + \omega^2 \sin. z'^2}$.

3. En mettant d'abord à part la quantité constante $2c\,dZ$, & supposant $k \sin. z = u$, & $\sqrt{(1 + uu)} = t$, on aura à intégrer la quantité $\frac{t^2 dt}{k^2 \left(1 + \frac{\omega^2 t^2 - \omega^2}{k^2}\right)} =$ (en réduisant & mettant $-\gamma^2$ pour $k^2 - \omega^2$) $\frac{t^2 dt}{\omega^2 \left(t^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)} =$

$$\frac{dt}{\omega^2} + \frac{\gamma^2 dt}{\omega^4 \left(t^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)} = \frac{1}{\omega^2} \left(dt + \frac{\gamma^2 dt}{\omega^2 \left(t^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)}\right).$$

4. L'intégrale de cette quantité doit être nulle lorſque $z = 0$, ou $u = 0$, ce qui donne $t = 1$, & complette lorſque aL (Fig. 35, Tom. VI, *Opuſ.*) $= 0$, ou $t = 0$.

5. Je remarque maintenant que ſi $\frac{\gamma^2}{\omega^2}$ eſt le même dans deux différens ſphéroïdes, l'intégrale $\int\left(dt + \frac{z^2 dt}{\omega^2\left(t^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)}\right)$ y ſera la même ; & que par conſéquent les attractions élémentaires des deux ſphéroïdes (Tom. VI, *Opuſc.* pag. 233) feront entr'elles comme $\frac{cdZ}{\omega^2}$ à $\frac{CdZ'}{\omega'^2}$; il faut donc trouver le rapport de ces deux quantités différentielles, & chercher dans quel cas ce rapport peut être conſtant.

6. Or, puiſque $\frac{\gamma^2}{\omega^2}$, ou $\frac{\omega^2}{\gamma^2}$ eſt le même (*hyp.*) dans les deux ſphéroïdes, ſi on met pour γ^2 & pour ω^2 leurs valeurs $\frac{\delta^2}{b'^2}$ & $\frac{c^2 - b'^2}{b'b'}$, & qu'on faſſe $\frac{\omega^2}{\gamma^2}$, ou $\frac{c^2 - b'^2}{\delta\delta} = u'u'$, $u'u'$ ſera le même pour les deux ſphéroïdes, & $\frac{dZ}{\omega^2}$ ſera $= \frac{dZ}{\delta\delta u'u'}(cc - \delta\delta u'u')$.

7. De plus, à cauſe de $\frac{cc - b'b'}{\delta\delta} = u'u'$, & de $b'b' = \frac{bb}{1 + \text{ſin. } Z^2\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}$, on aura la valeur de dZ en

en u & du, & l'on trouvera, après les substitutions & réductions, $\frac{dZ}{\delta\delta u'u'}(cc-\delta\delta u'u') = \frac{bb\,du'}{u'} \times$

$$\frac{1}{\sqrt{(b^2-c^2+\delta^2 u'^2)}} \times \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{a^2}-b^2-\frac{b^2u'^2\delta^2}{a^2}\right)}}.$$

8. Or il est aisé de voir que cette quantité sera la même pour les deux sphéroïdes, à un coefficient constant près (savoir ba), si on a $cc-bb$ le même pour les deux sphéroïdes, ainsi que $cc-aa$, la distance δ étant supposée aussi la même pour les deux sphéroïdes.

9. Donc on aura $cc-bb=CC-BB$, & $cc-aa=CC-AA$; ou, ce qui revient au même, $a^2-b^2=A^2-B^2$.

10. Donc dans cette hypothèse de $cc-bb=CC-BB$, & de $b^2-a^2=B^2-A^2$, les attractions des deux sphéroïdes à la même distance δ, seront entr'elles en raison donnée.

11. Il est visible de plus (en remettant la constante c qui doit entrer dans l'expression de l'attraction du sphéroïde (art. 2)) que l'attraction sera proportionnelle à bca; c'est-à-dire, à la solidité du sphéroïde.

12. Ainsi le théorême de M. Maclaurin, sur lequel j'avois proposé quelques doutes (pag. 242 de l'Ouvrage cité) est exactement vrai.

13. Comme la quantité $\frac{dZ}{u^2}$, ou (art. 7)

$$\frac{bbdu}{u\delta\sqrt{\left(uu+\frac{bb-cc}{\delta\delta}\right)}}\times\frac{a}{b}\times\frac{1}{\delta\sqrt{\left(\frac{c^2-a^2}{\delta^2}-u^2\right)}},$$

dépend évidemment des logarithmes ou des arcs de cercle, on pourroit croire d'abord que la détermination de l'attraction d'un sphéroïde à coupes elliptiques, ne dépend aussi que des arcs de cercle ou des logarithmes.

14. Mais il est aisé de voir que l'intégrale de $\frac{\gamma^2 dt}{\omega^2\left(t^2-\frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)}$ renferme un coefficient $\frac{\gamma}{\omega}$, qui, multipliant la différentielle ci-dessus, y introduira $\frac{du}{uu}$ au lieu de $\frac{du}{u}$, à cause de $\frac{\gamma}{\omega}=\frac{\delta}{\sqrt{(cc-b'b')}}=\frac{1}{u}$. Or l'introduction de ce nouvel u rendra la quantité $\frac{dZ}{\omega^2}$ intégrable par des arcs de sections coniques, comme il est aisé de le voir en faisant $u=\frac{1}{z}$, & $z=\sqrt{y}$.

15. Voici une autre maniere, moitié analytique, moitié synthétique, de démontrer la proposition de M. Maclaurin.

16. Il est aisé de voir que les deux attractions seront entr'elles comme $\frac{dZ}{\omega^2}$ à $\frac{dZ'}{\omega'^2}$, c'est-à-dire (à cause de $\frac{\omega^2}{\gamma^2}=\frac{\omega'^2}{\gamma'^2}$, comme $\frac{dZ}{\gamma^2}$ à $\frac{dZ'}{\gamma'^2}$, ou comme

$dZ.b'b'$ à $dZ'.B'B'$, ou enfin comme

$$\frac{dZ.bb}{1+\text{sin}.Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)}, \text{ à } \frac{dZ'.BB}{1+\text{sin}.Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)}.$$

17. La difficulté se réduit donc à prouver que

$\frac{dZ}{1+\text{sin}.Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)}$ est à $\frac{dZ'}{1+\text{sin}.Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)}$ en raison constante.

18. Or, en supposant pour plus de simplicité que les distances δ, D soient les mêmes de part & d'autre, l'équation $cc - \frac{bb}{1+\text{sin}.Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)} = CC - \frac{BB}{1+\text{sin}.Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)}$, donne, comme il est aisé de le voir par la différentiation, $\frac{dZ \text{ sin}.Z \text{ cos}.Z}{\left[1+\text{sin}.Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)\right]^2}$ en raison constante avec $\frac{dZ' \text{ sin}.Z' \text{ cos}.Z'}{\left[1+\text{sin}.Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)\right]^2}$.

19. Il faut donc qu'on ait $\frac{\text{sin}.Z \text{ cos}.Z}{1+\text{sin}.Z^2\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)}$ à $\frac{\text{sin}.Z' \text{ cos}.Z'}{1+\text{sin}.Z'^2\left(\frac{B^2}{A^2}-1\right)}$ en raison constante.

20. Or cela arrivera si on a

$$\frac{\text{sin. } Z}{\sqrt{\left[1+\text{sin. } Z^2\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\right]}} \text{ à } \frac{\text{sin. } Z'}{\sqrt{\left[1+\text{sin. } Z'^2\left(\frac{B^2}{A^2}-1\right)\right]}}$$

en raison constante, & $\frac{\text{cos. } Z}{\sqrt{\left[1+\text{sin. } Z^2\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\right]}}$ à

$\frac{\text{cos. } Z'}{\sqrt{\left[1+\text{sin. } Z'^2\left(\frac{B^2}{A^2}-1\right)\right]}}$, en raison constante.

21. Pour trouver les conditions qui donnent ces rapports constans, je multiplie par une indéterminée constante k, les deux membres de l'équation $cc - \frac{bb}{1+\text{sin. } Z^2\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)} = CC - \frac{BB}{1+\text{sin. } Z'^2\left(\frac{B^2}{A^2}-1\right)}$, & j'y ajoute une autre indéterminée constante μ, & j'ai $\mu + kcc - kb^2 + (\mu + kcc)$ sin. $Z^2 \times \frac{b^2 - a^2}{a^2}$ divisé par $1 +$ sin. $Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)$ égal à $\mu + kCC - kBB + (\mu + kCC)$ sin. $Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)$, divisé par $1 +$ sin. $Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)$.

22. Or, pour qu'il résulte de cette équation que

$$\frac{\text{sin. } Z}{\sqrt{\left[1+\text{sin. } Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)\right]}} \text{ est à } \frac{\text{sin. } Z'}{\sqrt{\left[1+\text{sin. } Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)\right]}}$$

en raison constante, il faut qu'on ait $\mu + kcc - kbb = 0$,

& $\mu + kCC - kBB = 0$, d'où l'on tire $-\frac{\mu}{k} = cc - bb = CC - BB$. Donc $CC - BB = cc - bb$; premiere condition.

23. Supposant maintenant d'autres indéterminées μ' & k', & mettant dans le numérateur des deux membres de l'équation précédente, $1 - \text{cos}.\, Z^2$ au lieu de sin. Z^2 & $1 - \text{cos}.\, Z'^2$ au lieu de sin. Z'^2, il est aisé de voir qu'on aura de même $\frac{\text{cos}.\, Z}{\sqrt{\left[1 + \text{sin}.\, Z^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)\right]}}$ en raison constante avec $\frac{\text{cos}.\, Z'}{\sqrt{\left[1 + \text{sin}.\, Z'^2 \left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right)\right]}}$, si $\mu' + k'cc + (\mu' + k'cc)\left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right) - k'b^2 = 0$, & si $\mu' + k'CC + (\mu' + k'CC)\left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right) - k'B^2 = 0$, c'est-à-dire, en réduisant, si $\frac{(\mu' + k'cc)}{a^2} - k' = 0$, & si $\frac{\mu' + k'CC}{A^2} - k' = 0$, d'où l'on tire $-\frac{\mu'}{k'} = cc - a^2 = CC - A^2$.

24. Donc on a pour seconde condition $cc - a^2 = CC - A^2$.

25. Donc puisqu'on a déja $cc - bb = CC - BB$, on aura encore $BB - AA = bb - aa$.

26. Donc, en supposant encore $k = 1$, & $k' = 1$, pour plus de simplicité, on aura $\mu = c^2 - b^2 = C^2 - B^2$,

& $\mu' = a^2 - c^2 = A^2 - C^2$; ainsi faisant dans l'art. 21 & dans l'art. 23, $k = 1$ & $k' = 1$, on trouvera les mêmes conditions que ci-dessus, & les quantités μ & μ' seront $cc - bb$ & $aa - cc$, ou $CC - BB$ & $AA - CC$.

27. On pourroit croire qu'il seroit possible de rendre les conditions $cc - bb = CC - BB$, & $cc - aa = CC - AA$ encore plus générales, en ne déduisant pas de l'équation donnée les deux équations séparées

$$\frac{\text{sin.}\, Z}{\sqrt{\left[1 + \text{sin.}\, Z^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)\right]}} \text{ à } \frac{\text{sin.}\, Z'}{\sqrt{\left[1 + \text{sin.}\, Z'^2 \left(\frac{B^2 - A^2}{a^2}\right)\right]}}$$

en raison constante, & $\frac{\text{cosin.}\, Z}{\sqrt{\left[1 + \text{sin.}\, Z^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)\right]}}$ à

$\frac{\text{cos.}\, Z'}{\sqrt{\left[1 + \text{sin.}\, Z'^2 \left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right)\right]}}$ en raison constante, mais en déduisant tout de suite & en une seule fois l'équation

$\frac{\text{sin.}\, Z \text{ cos.}\, Z}{1 + \text{sin.}\, Z^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)}$ à $\frac{\text{sin.}\, Z' \text{ cos.}\, Z'}{1 + \text{sin.}\, Z'^2 \left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right)}$ en raison constante.

28. Pour nous éclaircir là-dessus, multiplions l'une par l'autre les deux équations affectées de μ & k, μ' & k', & les numérateurs seront (en représentant par ζ les angles Z & Z' indifféremment, & par x, $\mathfrak{C}$ & α les quantités c & C, b & B, a & A indifféremment) $(\mu + kxx - k\mathfrak{C}\mathfrak{C}) \times (\mu' + k'xx - k'\mathfrak{C}\mathfrak{C}) +$ $\text{sin.}\, \zeta^2 \times \left[(\mu' + k'xx - k'\mathfrak{C}\mathfrak{C}) \times (\mu + kxx) \times \left(\frac{\mathfrak{C}^2 - \alpha^2}{\alpha^2}\right) +\right.$

$(\mu + kxx - k\zeta\zeta)(\mu' + k'xx)\left(\frac{\zeta^2 - a^2}{a^2}\right)] +$ fin. $\zeta^4 \times \left(\frac{\zeta^2 - a^2}{a^2}\right)^2 \times (\mu + kxx) \times (\mu' + k'xx)$. Or, pour que ce numérateur foit en raifon conftante avec fin. ζ^2 cof. ζ^2, ou avec fin. $\zeta^2 -$ fin. ζ^4, il faut 1°. que $(\mu + kxx - k\zeta\zeta) \times (\mu' + k'xx - k'\zeta\zeta) = 0$. D'où l'on tire d'abord $\mu + kxx - k\zeta\zeta = 0$; & par conféquent $xx - \zeta\zeta$ conftant, c'eft-à-dire, $CC - BB = cc - bb = 0$, comme ci-deffus. 2°. Que le coefficient de fin. ζ^2 foit à celui de fin. ζ^4 comme 1 eft à -1; d'où l'on tire, en réduifant & remarquant que $\mu + kxx - k\zeta\zeta = 0$, $(\mu' + k'xx - k'\zeta\zeta) = -(\mu' + k'xx) \times \left(\frac{\zeta^2 - a^2}{a^2}\right)$, ou $-k'a^2 = -\mu - k'xx$, & $xx - aa$ conftant, c'eft-à-dire, $cc - aa = CC - AA$, comme ci-deffus.

29. Nous avons fuppofé dans les calculs précédens, pour plus de fimplicité (art. 18) $\delta = D$; fi on ne vouloit pas s'aftreindre à cette condition, on auroit les équations $\frac{cc}{\delta\delta} - \frac{bb}{\delta\delta\left[1 + \text{fin.} Z^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)\right]} = \frac{CC}{DD} - \frac{BB}{DD\left[1 + \text{fin.} Z'^2 \left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right)\right]}$, & il eft aifé de voir que dans les équations de condition ci-deffus (art. 21 & 23), on aura $\frac{k}{\delta\delta}$ & $\frac{k'}{\delta\delta}$ au lieu de k & de k' (en défignant par

δ' les quantités δ & D indifféremment), d'où l'on tirera $\frac{cc-bb}{\delta\delta}=\frac{CC-BB}{DD}$, & $\frac{CC-AA}{DD}=\frac{cc-aa}{\delta\delta}$; donc $\frac{\delta\delta}{DD}=\frac{cc-aa}{CC-AA}=\frac{cc-bb}{CC-BB}$. Cette équation peut se déduire aussi des art. 7 & 8, en faisant $\frac{bb-cc}{\delta\delta}$ & $\frac{cc-aa}{\delta\delta}$ constant. Mais les suppositions de $\delta=D=C$ sont les plus simples, parce qu'elles donnent le moyen de comparer l'attraction d'un sphéroïde quelconque à la distance δ ou c, avec l'attraction à l'extrêmité de l'axe $2C$ dans un autre sphéroïde, tel que $CC-AA=cc-aa$, & $cc-bb=CC-BB$.

30. On peut démontrer la proposition de M. Maclaurin, d'une troisiéme maniere encore plus simple que les deux précédentes. Pour cela, on considérera qu'il s'agit de prouver (pag. 235, Tom. VI, *Opusc.*) que les secteurs elliptiques $\int cb'b'dZ$ & $\int CB'B'dZ$ sont en raison constante; or, pour que ces secteurs elliptiques soient en raison constante, il faut que les secteurs circulaires correspondans, ayant le même centre, le même axe & la même abscisse, soient aussi en raison constante, c'est-à-dire que les ordonnées de ces secteurs soient comme les rayons; maintenant soient prises sur l'axe b, l'abscisse x & l'ordonnée y correspondantes au demi-diametre b', c'est-à-dire, telles que $b'^2=x^2+y^2$, on sait que $yy=(bb-xx)\times\frac{aa}{bb}$;

$\frac{aa}{bb}$; d'où $x^2 = bb - \frac{yybb}{aa}$, & b'^2 ou $x^2 + y^2 = b^2 + y^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)$. Or la supposition de $c^2 - b'^2 = C^2 - B'^2$, de $C^2 - B^2 = c^2 - b^2$, & de $a^2 - b^2 = A^2 - B^2$, donne $b'^2 - a^2$ la même dans les deux ellipses; donc $\frac{y^2}{a^2}$ & $\frac{y}{a}$ sera aussi la même dans les deux ellipses; de plus, l'ordonnée correspondante du cercle décrit du rayon b, sera $\frac{yb}{a}$, donc les ordonnées des deux cercles seront comme $\frac{yb}{a}$ à $\frac{YB}{A}$; c'est-à-dire, comme b est à B. Donc, &c.

31. Les secteurs circulaires étant entr'eux comme b^2 à B^2, & les secteurs elliptiques correspondans étant aux secteurs circulaires comme a est à b, il s'ensuit que les secteurs elliptiques $\int b'b'dZ$ & $\int B'B'dZ'$ seront entr'eux comme ba à BA; donc les attractions totales seront comme cba à CBA.

32. Il est aisé, par la théorie précédente, de montrer que la quantité $\frac{d\zeta}{cc - bb + bb\zeta\zeta\left(\frac{cc}{aa} - 1\right)}$ (page 241, Tom. VI, *Opusc.*) est en raison constante avec la quantité correspondante dans l'autre sphéroïde. En effet, la question se réduit à prouver (à cause de $cc - bb$ constant, & de $cc - aa$ constant), que $\frac{bb\zeta\zeta}{aa}$

eſt le même dans les deux ſphéroïdes, c'eſt-à-dire, que ζ eſt comme $\frac{a}{b}$; or, c'eſt ce qui eſt clair par la démonſtration précédente, car puiſque les angles des deux ſecteurs circulaires ſont les mêmes, & que les tangentes ζ des ſecteurs elliptiques correſpondans ſont aux tangentes (égales) des ſecteurs circulaires (art. 30 & 31) comme a eſt à b; il s'enſuit que ζ eſt comme $\frac{a}{b}$.

33. Il faut encore remarquer, à la fin de la page 242, que l'équation $\frac{CC}{B'B'} = \frac{\delta\delta}{\delta\delta - cc + b'b'}$ n'a lieu dans la ſuppoſition préſente, qu'en faiſant $\delta = c$, parce que $CC - B'B'$ eſt ſuppoſé ici $= cc - b'b'$, & qu'ainſi il ne ſe trouve point dans cette équation $CC - B'B' = cc - b'b'$, de quantité δ qui ſoit différente de C.

34. J'obſerverai en finiſſant ces recherches, qu'à la page 138 des Mém. de Berlin, 1773, il s'eſt gliſſé une faute d'impreſſion qui pourroit faire croire que les formules de M. de la Grange ne s'accordent pas avec les nôtres; au lieu de $\frac{1-m}{m} = \mu$, il faut lire $\frac{1-m}{m} = \mu^2$, de ſorte que μ eſt une quantité radicale au lieu d'une quantité rationnelle qu'il ſembleroit être, ſi on s'en tenoit à l'expreſſion $\frac{1-m}{m} = \mu$; par ce moyen les quantités que M. de la Grange appelle Q & Q'

dans la page suivante, & que j'avois d'abord crues plus simples que les quantités analogues dans mes calculs, sont précisément du même genre, en sorte que l'intégration reste également difficile.

35. On peut observer aussi que dans les formules de M. de la Grange, il faut, pour avoir l'attraction dans le plan de l'équateur, supposer dans ces formules $m=1$ ou $n=1$, l'autre coefficient n ou m étant d'ailleurs ce qu'on voudra; & les résultats seront les mêmes que ceux de la page 183 du Tom. VI de nos *Opuscules*, résultats qui ne donnent point la valeur de cette attraction. Ainsi, il paroît nécessaire d'employer ici quelque moyen analogue à la méthode de M. Maclaurin, pour trouver l'attraction dans l'équateur.

36. Pour cet effet, soit dans la méthode de M. de la Grange, c l'axe parallèle aux z, b l'axe parallèle aux x, a l'axe parallèle aux y, on aura $z^2 + \frac{c^2 x^2}{b^2} + \frac{c^2 y^2}{a^2} = c^2$; soit ensuite supposé $c - z = z'$ pour faire commencer les z' à l'extrémité de l'axe $2c$ où l'on suppose que se fait l'attraction, on aura $-2cz' + z'z' + \frac{c^2 x^2}{b^2} + \frac{c^2 y^2}{a^2} = 0$; & si $c = b$, on aura $x^2 + z'z' - 2cz' + \frac{c^2 y^2}{a^2} = 0$. Soit fait ensuite, conformément à la méthode de M. de la Grange, $y = r$ sin. p, $x = r$ cos. p sin. q, $z' = r$ cos. p cos. q, en imaginant que

les r ſoient projettés, non ſur le plan de a & de b, comme dans ſa ſolution, mais ſur celui de c & de b, on aura r^2 coſ. $p^2 - 2cr$ coſ. p coſ. $q + r^2$ ſin. $p^2 \times \frac{c^2}{a^2} = 0$; d'où $r = \frac{2c \text{ coſ. } p \text{ coſ. } q}{\text{coſ. } p^2 + \text{ſin. } p^2 \times \frac{c^2}{a^2}}$; où l'on voit que la valeur de r ne contient point de q au dénominateur; & comme l'élément de l'attraction parallèlement aux z', eſt ici $rdpdq \times$ coſ. p coſ. q, ainſi qu'il eſt aiſé de le voir, on trouvera très-facilement par ce moyen l'attraction d'un ſphéroïde dans le plan de l'équateur, en employant la méthode de M. de la Grange, mais en changeant l'origine des coordonnées & le plan de projection. J'avois déja fait cette remarque (Mém. de Berlin, 1774, pag. 311), dans une lettre écrite à M. de la Grange, le 15 Décembre 1775.

§. II.

Comparaiſon des deux formules des pages 181 & 184 du Tome VI de nos Opuſcules.

1. J'ai fait différens eſſais pour parvenir à déterminer l'attraction d'un ſphéroïde elliptique, qui n'eſt pas un ſolide de révolution, & quoique ces eſſais n'ayent pas abouti à des réſultats beaucoup plus ſimples que ceux du Tome VI de mes *Opuſcules*, je crois devoir les expoſer ici, parce qu'ils fourniront peut-être à

d'autres Géométres des vues dont ils sauront mieux tirer parti que moi.

2. J'ai donné dans le Tome VI de mes *Opuscules*, deux formules différentes pour l'attraction de ces sphéroïdes, l'une, pag. 181, art. 109; l'autre, pag. 183, art. 114, & ces deux formules sont à-peu-près également simples. Voici de nouvelles remarques sur l'une & l'autre de ces formules, pour juger des cas où l'une doit être employée préférablement à l'autre. Je commence par celle de la page 181. Je suppose toujours qu'on ait le Tome VI de mes *Opuscules* sous les yeux; & je remarque d'abord qu'au lieu de $\alpha(1-r'r')^{\frac{3}{2}}$ au dénominateur, il faut $\alpha^2(1-r'r')^{\frac{3}{2}}$, α ayant été mis pour α^2 par une faute d'impression légere, mais comme α^2 est toujours réel, soit positif, soit négatif, je négligerai ici cette quantité constante α^2 pour rendre les calculs un peu plus faciles; en sorte que la différentielle à intégrer sera simplement $\frac{-dr'}{(1-r'r')^{\frac{3}{2}}}\times$
$\frac{\sqrt{(r'^2-6^2)}}{\sqrt{(6^2\alpha^2+6^2-r'^2)}} AT.\left(\frac{\sqrt{(1-r'r')}}{r'}\right)$.

3. Cela posé, soient les trois axes c, a, b, inégaux entr'eux; nous faisons cette supposition, parce que dans le cas où deux des axes sont égaux, les calculs de MM. Maclaurin & Clairaut, donnent l'attraction par des arcs de cercle ou des logarithmes, & qu'ainsi ce cas ne peut ici exiger aucune recherche particuliere.

4. Dans cette supposition de l'inégalité des trois axes, il peut arriver deux cas ; ou $\sqrt{(1-\nu'\nu')}$ est réel, ou il est imaginaire ; dans ce dernier cas, la formule doit être changée en une autre, comme on le verra plus bas.

5. Arrêtons-nous d'abord au cas de $\sqrt{(1-\nu'\nu')}$ réel, ce qui donne $\nu'^2 < 1$; & observons que ν'^2 est toujours une quantité réelle & positive, puisque $\nu'^2 = \zeta^2(1 + \alpha^2 \cos. z^2) = \zeta^2\left[1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)\cos. z^2\right] = \zeta^2\left(\sin. z^2 + \frac{b^2}{a^2}\cos. z^2\right)$, & qu'ainsi ν' ne peut jamais être imaginaire dans la fraction $\frac{\sqrt{(1-\nu'\nu')}}{\nu'}$, mais seulement $\sqrt{(1-\nu'\nu')}$.

6. J'observe d'abord que ν'^2 peut-être < 1 dans toute l'étendue du sphéroïde, c'est-à-dire, depuis $z = 0$, jusqu'à $z = 90°$ (art. 107 du Vol. cité, pag. 179) ; ou que ν'^2 peut être < 1 dans une portion du sphéroïde, & plus grand dans l'autre.

7. Pour que ν'^2 soit < 1 dans toute l'étendue du sphéroïde, il faut considérer, 1°. que $\nu'^2 = \zeta^2(1 + \alpha^2 \cos. z^2)$; 2°. que si α^2 est positif, c'est-à-dire, si $\frac{b^2}{c^2} - 1$ est positif, ce qui donne $b > c$, la plus grande valeur de ν'^2 est $\zeta^2 + \alpha^2\zeta^2$, en observant que $\zeta^2 = \frac{a^2}{b^2}$ est toujours positif ; or $\zeta^2 + \alpha^2\zeta^2 = (\alpha^2 + 1)\zeta^2 = \frac{b^2}{c^2} \times \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{c^2}$; donc pour que ν'^2 soit < 1 dans toute l'étendue du sphéroïde, $\frac{a^2}{c^2}$ doit être ≤ 1, ou tout au plus $= 1$;

& comme on suppose tous les axes inégaux, on aura $\frac{a^2}{c^2} < 1$, ou $a < c$.

8. Donc, restant toujours dans cette supposition de α^2 positif, & faisant les trois axes inégaux, il faut pour que ν'^2 soit < 1 dans toute l'étendue du sphéroïde, que $b > c > a$.

9. Maintenant, dans le cas où $\nu'^2 < 1$, & où α^2 est positif, qui est celui dont il s'agit ici, il est évident que cos. z^2 étant $= \frac{\nu'^2 - \beta^2}{\beta^2 \alpha^2}$, $\nu'^2 - \beta^2$ est nécessairement positif, & qu'ainsi le radical $\sqrt{(\nu'^2 - \beta^2)}$ est réel, aussi bien que le radical $\sqrt{(\beta^2 \alpha^2 + \beta^2 - \nu'^2)}$, puisque $z^2 = \frac{\beta^2 \alpha^2 + \beta^2 - \nu'^2}{\beta^2 \alpha^2}$.

10. Il n'y aura donc en ce cas aucun changement à faire à la formule de la page 181 du Tom. VI de nos *Opuscules* (article 111), qui est (en supposant $\frac{\nu'}{\sqrt{(1 - \nu'\nu')}} = \mu$), $\frac{d\mu \sqrt{[\mu^2(1 - \beta^2) - \beta^2]}}{\sqrt{[(\beta^2 \alpha^2 + \beta^2 - 1)\mu^2 + \beta^2 \alpha^2 + \beta^2]}} \times AT \frac{1}{\mu}$, quantité dans laquelle β^2 & $\beta^2 \alpha^2 + \beta^2$ sont évidemment positifs, puisque $\beta^2 = \frac{a^2}{b^2}$, & $\beta^2 \alpha^2 + \beta^2 = \frac{a^2}{c^2}$; & dans laquelle $\beta^2 \alpha^2 + \beta^2 - 1$ est $\frac{a^2}{c^2} - 1$, c'est-à-dire, négatif. Il est visible de plus que $1 - \beta^2$ est positif pour deux raisons ; 1°. parce que $1 - \beta^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$, & que a (*hyp.*) est $< b$; 2°. parce que si $1 - \beta^2$ étoit négatif, le radical supérieur seroit imaginaire, le radical

inférieur étant réel, ce qu'on ne fauroit fuppofer.

11. Donc la différentielle fe réduit à la forme $\frac{d\mu\sqrt{(g\mu\mu - f)}}{\sqrt{(h - k\mu\mu)}} \times AT\frac{1}{\mu}$.

12. Donc (LIIIe Mém. §. III, art. 22) la quantité différentielle qui multiplie ici $AT\frac{1}{\mu}$ ne peut fe réduire ni à un fimple arc d'ellipfe, ni à un fimple arc d'hyperbole, comme nous l'avons déja prouvé d'une autre maniere dans le Tome VI de nos *Opufcules*, pag. 203 & 204; mais elle fe réduit, par ce même art. 22, à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique.

13. Pour mettre cette quantité fous la forme la plus fimple, je fais $p =$ à l'angle dont la tangente eft $\frac{1}{\mu}$, & j'ai $\frac{\text{fin.}\,p}{\text{cof.}\,p} = \frac{1}{\mu}$, $\mu = \frac{\text{cof.}\,p}{\text{fin.}\,p}$, $d\mu = -\frac{dp}{\text{fin.}\,p^2}$, de forte que la différentielle propofée fe réduit à $-\frac{p\,dp}{\text{fin.}\,p^2} \times \frac{\sqrt{(\text{cof.}\,p^2 - \zeta^2)}}{\sqrt{(\zeta^2 a^2 + \zeta^2 - \text{cof.}\,p^2)}}$, ou $-\frac{p\,dp}{\text{fin.}\,p^2} \times \frac{\sqrt{\left(\text{cof.}\,p^2 - \frac{a^2}{b^2}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{ga^2}{c^2} - \text{cof.}\,p^2\right)}}$, quantité qu'on peut encore fimplifier en mettant pour fin. p^2 & cof. p^2 leurs valeurs $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\text{cof.}\,2p$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\text{cof.}\,2p$, & en faifant $2p = u$, ce qui réduira la différentielle à une quantité de cette forme $\frac{Eu\,du\sqrt{(A + \text{cof.}\,u)}}{(1 \pm \text{cof.}\,u)\sqrt{(B \pm \text{cof.}\,u)}}$; mais l'intégration refte toujours également difficile, & dépendante des fections coniques, excepté

excepté dans le cas où $B=1$, c'est-à-dire, où deux des axes sont égaux; cas dont il n'est point question ici.

14. On peut remarquer encore que comme $\frac{1}{\mu}$, ou $\frac{\text{sin. } p}{\text{cos. } p} = \frac{\sqrt{(1-\nu'^2)}}{\nu'}$, on a cos. $p=\nu'$ & sin. $p=\sqrt{(1-\nu'^2)}$; ainsi les deux limites de cos. p sont les mêmes que celles de ν', savoir (art. 7), cos. $p=\mathcal{C}^2=\frac{a^2}{c^2}$ lorsque $z=90°$, ou cos. $z=0$, & cos. $p=\mathcal{C}^2+\alpha^2\mathcal{C}^2=\frac{a^2}{c^2}$ lorsque $z=0$, ou cos. $z=1$.

15. Enfin, puisque p est l'angle dont la tangente est $\sqrt{(\nu\nu-1)}$ (ν étant $=\frac{1}{\nu'}$ & $\nu>1$) & par conséquent dont la sécante est ν, & que cette sécante $\nu=\frac{CV}{CR}$ (Fig. 13), il s'ensuit que cette sécante est $=$ au demi-diametre CV en prenant $CR=a$ pour sinus total.

16. Supposons présentement α^2 négatif, c'est-à-dire, $b<c$, les trois axes étant toujours supposés inégaux, & ν'^2 étant toujours supposé <1; on fera $\alpha^2=-\alpha'^2$, α'^2 étant positif, & on aura $\nu'^2=\mathcal{C}^2-\mathcal{C}^2\alpha'^2$ cos. z^2, cos. $z^2=\frac{\mathcal{C}^2-\nu'^2}{\mathcal{C}^2\alpha'^2}$, sin. $z^2=\frac{\mathcal{C}^2\alpha'^2-\mathcal{C}^2+\nu'^2}{\mathcal{C}^2\alpha'^2}$; donc ν'^2 sera $<\mathcal{C}^2$, & la différentielle de l'art. 109, pag. 180, Tom. VI, *Opusc.* deviendra $\frac{d\nu'}{\alpha'^2(1-\nu'\nu')^{\frac{1}{2}}}\times$

$$\frac{\sqrt{(\mathcal{C}^2-\nu'^2)}}{\sqrt{(\mathcal{C}^2\alpha'^2-\mathcal{C}^2+\nu'^2)}}\times AT.\left(\frac{\sqrt{(1-\nu'\nu')}}{\nu'}\right).$$

17. Par conséquent la différentielle à intégrer sera

(en faisant toujours $\mu = \frac{\nu'}{\sqrt{(1-\nu'\nu')}}$)

$$\frac{d\mu\sqrt{(\zeta^2+(\zeta^2-1)\mu^2}}{\sqrt{[(\zeta^2\alpha'^2-\zeta^2+1)\mu^2+\zeta^2\alpha'^2-\zeta^2]}}.$$

18. Dans ce cas ν'^2 sera $<\zeta^2$, puisque $\nu'^2=\zeta^2-\alpha'^2\zeta^2$ cos. z^2; & les deux limites de la valeur de $\nu'^2=\zeta^2-\zeta^2\alpha'^2$ cos. z^2 seront $\zeta^2=\frac{a^2}{b^2}$, & $\zeta^2-\alpha'^2\zeta^2=\frac{a^2}{c^2}$; donc pour que ν'^2 soit <1 dans toute l'étendue du sphéroïde, il faudra que a^2 soit $<b^2$; c'est-à-dire, à cause de $b^2<c^2$ (*hyp.*) qu'on aura $a<b<c$.

19. De plus, il est clair que dans ce cas $\zeta^2\alpha'^2-\zeta^2=-\zeta^2\alpha^2-\zeta^2=-\frac{a^2}{c^2}$, & par conséquent négatif; que ζ^2-1, ou $\frac{a^2}{b^2}-1$ est aussi négatif, & que $\zeta^2\alpha'^2-\zeta^2+1$, ou $-\frac{a^2}{c^2}+1$ est positif.

20. Donc la différentielle qui multiplie $AT\frac{1}{\mu}$, se réduira à la forme $\frac{d\mu\sqrt{(f-g\mu\mu)}}{\sqrt{(k\mu\mu-h)}}$, qui dépend (LIIIe Mém. §. III, art. 23,) d'un arc d'ellipse & d'un arc d'hyperbole.

21. En faisant (comme dans l'art. 13) $\mu=\frac{\text{cos. } p}{\text{sin. } p}$, la formule différentielle du cas présent se changera en $\frac{p\,dp}{\text{sin. } p^2}\times\frac{\sqrt{(\zeta^2-\text{cos. } p^2)}}{\sqrt{\left(\text{cos. } p^2-\frac{a^2}{c^2}\right.}}$, sur laquelle on peut

faire les mêmes remarques & réductions que dans la formule analogue du cas précédent.

22. Venons maintenant au cas de $\nu'^2 > 1$, ce qui donne $\sqrt{(1-\nu'^2)} = \sqrt{(\nu'^2-1)}.\sqrt{-1}$, & remarquons d'abord que l'angle dont la tangente est k, est $\frac{1}{2\sqrt{-1}} \times \log.\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1-k\sqrt{-1}}\right)$, k étant tout ce qu'on voudra; d'où il s'ensuit que l'angle dont la tangente est $k\sqrt{-1}$ sera $\frac{1}{2\sqrt{-1}} \log.\left(\frac{1-k}{1+k}\right)$; & qu'ainsi l'angle dont la tangente est $\frac{\sqrt{(\nu'^2-1)}}{\nu'} \times \sqrt{-1}$, se trouvant multiplié, dans la différentielle à intégrer, par $\frac{1}{\sqrt{(1-\nu'\nu')}} = \frac{1}{\sqrt{(\nu'\nu'-1)}.\sqrt{-1}} = \frac{1}{k\sqrt{-1}}$, le tout se réduira à une quantité réelle, & les imaginaires disparoîtront.

23. Faisant donc ici $\mu = \mu'\sqrt{-1}$, & prenant μ' pour une quantité réelle, on aura $d\mu A T \frac{1}{\mu} = d\mu'\sqrt{-1} \times \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\log.\left(1+\frac{\sqrt{-1}}{\mu'\sqrt{-1}}\right) - \log.\left(1-\frac{\sqrt{-1}}{\mu'\sqrt{-1}}\right)\right.$ $\left.= \frac{d\mu'}{2} \log.\left(\frac{1+\frac{1}{\mu'}}{1-\frac{1}{\mu'}}\right)\right]$, ou $\frac{d\mu'}{2} \log.\left(\frac{1+\mu'}{\mu'-1}\right)$; quantité toute réelle.

24. On peut remarquer que $\frac{1}{\mu'\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{(1-\nu'\nu')}}{\ell}$,

& par conséquent $\frac{1}{\mu'} = -\frac{\sqrt{(\nu'\nu'-1)}}{\nu'}$; ainsi

$$\log.\left(1+\frac{1}{\mu'}\right)-\log.\left(1-\frac{1}{\mu'}\right)=\log.\left(\frac{\nu'-\sqrt{(\nu'\nu'-1)}}{\nu'+\sqrt{(\nu'\nu'-1)}}\right)$$
$$= \log.[\nu'-\sqrt{(\nu'\nu'-1)}]^2 = 2\log.[\nu'-\sqrt{(\nu'\nu'-1)}].$$

Or $\log.\nu'-\sqrt{(\nu'\nu'-1)}$ est l'intégrale de $\int\frac{-d\nu'}{\sqrt{(\nu'\nu'-1)}}$, qui dépend d'un secteur hyperbolique dont 1 est le demi-axe, & ν' l'abscisse.

25. Nous supposons d'abord ici $\nu'^2 > \beta^2$, & cette supposition peut très-bien subsister avec celle de $\nu'^2 > 1$, il suffit pour cela, 1°. que α^2 soit positif, c'est-à-dire, $b > c$, puisque, cos. $z^2 = \frac{\nu'^2 - \beta^2}{\beta^2\alpha^2}$ étant toujours positif, il faut que $\nu'^2 > \beta^2$. 2°. Que la plus petite valeur de ν'^2, c'est-à-dire, β^2, ou $\frac{a^2}{b^2}$, soit > 1, c'est-à-dire, $a > b$. Donc on a ici $a > b > c$.

26. Nous aurons donc ici ν'^2, ou $\frac{\mu^2}{1+\mu^2} = \frac{-\mu'^2}{1-\mu'^2}$, ou afin de rendre tout positif $\nu'^2 = \frac{\mu'^2}{\mu'^2-1}$, d'où la différentielle qu'il s'agit ici d'examiner, abstraction faite de $AT\frac{1}{\mu}$, sera $\frac{d\mu'\sqrt{[\mu'^2(1-\beta^2)+\beta^2]}}{\sqrt{[(\beta^2\alpha^2+\beta^2-1)\mu'^4-\beta^2\alpha^2-\beta^2]}}$.

27. Or on a ici, 1°. $a^2 > b^2$, d'où $\frac{a^2}{b^2}$, ou $\beta^2 > 1$; 2°. $\beta^2\alpha^2+\beta^2-1 = \frac{a^2}{c^2}-1$, & par conséquent positif, puisque $a > c$.

28. Donc la différentielle fera de la forme $\frac{d\mu' \sqrt{(f - g\mu'\mu')}}{\sqrt{(k\mu'\mu' - h)}}$, qui dépend, comme dans l'art. 19; d'un arc d'ellipfe & d'un arc d'hyperbole.

29. Si ν'^2 eft $< \beta^2$, alors α^2 fera négatif, & réciproquement; donc $\alpha^2 = -\alpha'^2$, & on aura dans la différentielle de la page 180, Tom. VI, *Opufc.* la quantité $\frac{\sqrt{(\beta^2 - \nu'^2)}}{\sqrt{(\beta^2 \alpha'^2 - \beta^2 + \nu'^2)}}$; ainfi mettant pour ν'^2 fa valeur $\frac{\mu'^2}{\mu'^2 - 1}$, la différentielle qu'il s'agit d'examiner ici fera $\frac{d\mu' \sqrt{[\mu'^2 \beta^2 - 1) - \beta^2]}}{\sqrt{[(\beta^2 \alpha'^2 - \beta^2 + 1)\mu'^2 + \beta^2 - \beta^2 \alpha'^2]}}$.

30. Or, ν'^2 étant fuppofé > 1, la plus petite valeur de ν'^2 qui eft ici $\beta^2 - \beta^2 \alpha'^2 = \frac{a^2}{c^2}$, eft > 1. Donc $a > c$. De plus, α^2 négatif donne $b < c$; donc $a > c > b$; donc β^2, ou $\frac{a^2}{b^2} > 1$; donc auffi $\beta^2 \alpha'^2 - \beta^2 + 1$, ou $1 - \frac{a^2}{c^2}$ eft négatif; donc la différentielle fera de la forme $\frac{d\mu' \sqrt{(g\mu'\mu' - f)}}{\sqrt{(h - k\mu'\mu')}}$, qui dépend, comme dans l'art. 11 ci-deffus, d'un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique.

31. Venons préfentement au cas où ν'^2 eft alternativement $<$ & > 1. Suppofons d'abord α^2 pofitif, c'eft-à-dire, $b > c$, ce qui donne (art. 9) $\nu'^2 > \beta^2$, il eft clair que $\beta^2 + \alpha^2 \beta^2$, ou $\frac{a^2}{c^2}$, qui eft la plus grande

valeur de ν' sera >1, & $\mathfrak{C}^2$, qui est sa plus petite valeur, sera <1. Donc $\frac{a^2}{c^2}>1$, & $\frac{a^2}{b^2}<1$, donc $a>c$, $b>a$, & $b>c$, ce qui donne $b>a>c$.

32. Donc la différentielle dont il s'agit ici sera, dans le cas où ν' est <1, de la même forme que celle de la pag. 181, Tom. VI, *Opusc.* & par conséquent à cause de $1-\mathfrak{C}^2$ positif, & de $\mathfrak{C}^2\alpha^2+\mathfrak{C}^2-1$, ou $\frac{a^2}{c^2}-1$ positif, sera de la forme $\frac{d\mu\sqrt{(g\mu\mu-f)}}{\sqrt{(h+k\mu\mu)}}$, qui dépend (§. III du LIIIe Mém. art. 23) d'un arc d'ellipse & d'un arc d'hyperbole.

33. Et dans le cas de $\nu'>1$, la différentielle aura, comme dans l'art. 26 ci-dessus la forme $\frac{d\mu'\sqrt{[(\mu'^2(1-\mathfrak{C}^2)+\mathfrak{C}^2]}}{\sqrt{[(\mathfrak{C}^2\alpha^2+\mathfrak{C}^2-1)\mu'^2-\mathfrak{C}^2\alpha^2-\mathfrak{C}^2]}}$, qui se réduit à la forme $\frac{d\mu'\sqrt{(f-g\mu'\mu')}}{\sqrt{(k\mu'\mu'-h)}}$, laquelle dépend encore d'un arc d'ellipse & d'un arc d'hyperbole.

34. Supposons maintenant α^2 négatif & $=-\alpha'^2$, ce qui donne $b^2<c^2$; ν'^2 étant alternativement <1 & >1. Il est clair, 1°. que ν'^2 sera $<\mathfrak{C}^2$, à cause de cos. $z^2=\frac{\nu'^2-\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}^2\alpha^2}=\frac{\mathfrak{C}^2-\nu'^2}{\mathfrak{C}^2\alpha'^2}$. 2°. Que la plus petite valeur de ν'^2, savoir $\mathfrak{C}^2-\alpha'^2\mathfrak{C}^2$ ou $\frac{a^2}{c^2}$ sera <1, & sa plus grande valeur $\mathfrak{C}^2$ ou $\frac{a^2}{b^2}$ sera ≥ 1. Donc $a>b$, $c\geq a$, & $b\leq c$, ou $c\geq a\geq b$.

35. Donc la différentielle dont il s'agit ici, sera (art. 17) dans le cas de $\nu' < 1$, de la forme $\frac{d\mu \sqrt{[\beta^2 + (\beta^2 - 1)\mu^2]}}{\sqrt{[(\beta^2 \alpha'^2 - \beta^2 + 1)\mu^2 + \beta^2 \alpha'^2 - \beta^2]}}$, ou $\frac{d\mu \sqrt{(f + g\mu\mu)}}{\sqrt{(k\mu\mu - h)}}$, qui se réduit (LIIIe Mém. §. III, art. 23) à un arc d'ellipse & à un arc d'hyperbole.

36. Et dans le cas de $\nu' > 1$, la différentielle aura (art. 29) la forme $\frac{d\mu' \sqrt{[\mu'^2 (\beta^2 - 1) - \beta^2]}}{\sqrt{[(\beta^2 \alpha'^2 - \beta^2 + 1)\mu'^2 + \beta^2 - \beta^2 \alpha'^2]}}$, ou $\frac{d\mu' \sqrt{(g\mu'\mu' - f)}}{\sqrt{(k\mu'\mu' + h)}}$, qui se réduit encore à un arc d'ellipse & un arc d'hyperbole.

37. Nous avons donné dans les articles précédens les conditions de rapport entre c, b, a, qui donnent ν'^2 toujours plus petit ou toujours plus grand que l'unité, ou successivement plus petit ou plus grand que l'unité, α^2 étant supposé positif ou négatif, c'est-à-dire, $b >$ ou $< c$. On peut trouver ces mêmes conditions par une autre méthode fort simple.

38. Pour cela, on considérera que $\nu' = \frac{1}{\nu}$, & que (art. 15) $\nu = \frac{CV}{CR}$ (Fig. 13); donc pour que ν' soit toujours $<$ ou toujours > 1, ou successivement $>$ & < 1, il faut que ν ou CV soit toujours $>$ ou $< CR$, ou successivement $>$ ou $< CR$.

39. Or CV est moyenne entre CK & CA. Donc, 1°. supposant α^2 positif, ou $CK > CA$, il faut que

$\frac{CV}{CR}$, ou $\frac{CV}{a}$ soit toujours >1. Donc CA ou c doit être $>a$, puisque CA est ici la plus petite valeur de CV. Donc $b>c>a$.

2°. Par la même raison, pour que $\frac{CV}{a}$ soit toujours <1, il faut que sa plus grande valeur $\frac{b}{a}$ soit <1; c'est-à-dire, que b soit toujours $<a$; donc $a>b>c$.

3°. Enfin, pour que $\frac{CV}{a}$ soit alternativement $>$ & <1, il faut que la plus grande valeur de $\frac{CV}{a}$, c'est-à-dire, $\frac{b}{a}$ soit >1, & sa plus petite valeur $\frac{c}{a}<1$. Donc $b>a>c$.

40. Supposons maintenant α^2 négatif, c'est-à-dire, $b<c$, il faut,

1°. Pour que $\frac{CV}{a}$ soit toujours >1, que la plus petite valeur de $\frac{CV}{a}$, c'est-à-dire, $\frac{b}{a}$, soit >1. Donc $c>b>a$.

2°. Pour que $\frac{CV}{a}$ soit toujours <1, il faut que la plus grande valeur de $\frac{CV}{a}$, c'est-à-dire, $\frac{c}{a}$ soit <1. Donc $a>c>b$.

3°. Enfin, pour que $\frac{CV}{a}$ soit alternativement $>$ &

<1,

<1, il faut que sa plus petite valeur $\frac{b}{a}$ soit <1, & sa plus grande valeur $\frac{c}{a}>1$. Donc $c>a>b$.

41. On voit donc, 1°. que ν'^2 sera toujours <1 dans les deux cas suivans :

$$\text{I. } b>c>a;$$
$$\text{II. } c>b>a;$$

ce qui s'accorde avec les art. 8 & 18.

2°. Que ν'^2 sera toujours >1 dans les deux cas suivans :

$$\text{III. } a>b>c;$$
$$\text{IV. } a>c>b;$$

ce qui s'accorde avec les art. 25 & 30.

3°. Enfin, que ν'^2 sera successivement $<$ & >1 dans les deux cas suivans :

$$\text{V. } b>a>c,$$
$$\text{VI. } c>a>b;$$

ce qui s'accorde avec les art. 31 & 34.

42. Ces six conditions, que j'ai marquées par les chiffres romains I, II, &c. expriment évidemment tous les cas possibles d'inégalité entre les demi-axes c, b, a.

43. Dans le cas où ν'^2 est toujours <1, la quantité $AT\frac{1}{\mu}$ dépend uniquement des arcs de cercle ; dans le cas où ν'^2 est >1, elle dépend uniquement des logarithmes; enfin, dans le cas où ν'^2 est d'abord <1,

& ensuite plus grand ou réciproquement, elle dépend d'abord des arcs de cercle, & ensuite des logarithmes, ou réciproquement.

44. Or, dans le cas où r'^2 est successivement $<$ & >1, ou successivement $>$ & <1, on a $r^2 = \frac{1}{r'^2}$ successivement $>$ & <1, ou successivement $<$ & >1, c'est-à-dire, $b>a>c$ & $b<a<c$, ou $c>b>a$; ou $b<a<c$ & $b>a>c$.

45. Donc dans le Ve des cas précédens (art. 41), la quantité $AT\frac{1}{\mu}$ est d'abord circulaire, puis logarithmique; & dans le VIe, elle est d'abord logarithmique, puis circulaire.

46. Je désignerai par (C) le cas où $AT\frac{1}{\mu}$ est toujours circulaire, par (L) le cas où elle est toujours logarithmique, & par (CL) le cas où elle est d'abord circulaire, & ensuite logarithmique, & par (LC) le cas où elle est d'abord logarithmique, ensuite circulaire.

47. Donc en supposant, comme nous le faisons ici, que les coupes elliptiques faites par l'extrêmité de l'axe $2c$ soient perpendiculaires au plan de c & de b, nous aurons (art. 41, 43, 44 & 45) les six combinaisons suivantes :

I. $b>c>a$ (C)
II. $c>b>a$ (C)
III. $a \geq b \geq c$ (L)

IV. $a > c > b$ (*L*)
V. $b > a > c$ (*CL*)
VI. $c > a > b$ (*LC*)

48. Nous avons ſuppoſé que les coupes elliptiques étoient perpendiculaires au plan de l'ellipſe qui a pour demi-axes c & b. Si elles l'étoient au plan de l'ellipſe qui a pour demi-axe c & a, alors nommant ζ' un des demi-diametres de cette ellipſe à volonté, il eſt clair que les rapports des axes des ellipſes qui forment les coupes, ſeront celui de ζ' à b; d'où il s'enſuit que pour avoir les conditions où ν'^2 ſera toujours < 1, ou toujours > 1, ou ſucceſſivement $<$ & > 1, il faudra mettre dans les conditions de l'article précédent, a pour b, & b pour a. Donc,

1°. ν'^2 ſera toujours < 1 ſi

$a > c > b$ IV. (*C*)
ou $c > a > b$ VI. (*C*)

2°. ν'^2 ſera toujours > 1 ſi

$b > a > c$ V. (*L*)
ou $b > c > a$ I. (*L*)

3°. Enfin, ν'^2 ſera ſucceſſivement $<$ & > 1, ſi l'on a

$a > b > c$ III. (*CL*)
ou $c > b > a$ II. (*LC*)

49. D'où l'on voit que ſi ν'^2 eſt ſucceſſivement $>$ & < 1, ou $<$ & > 1, en coupant le ſolide elliptique par un plan perpendiculaire à celui des c & des b, on pourra avoir ν'^2 toujours $\leq$ ou ≥ 1, en coupant le

même ſolide par un plan perpendiculaire à celui des c & des a, & réciproquement, puiſque dans le premier cas on aura la Ve & la VIe condition, qui, dans le ſecond cas, donnent ν'^2 toujours > 1 ou toujours < 1.

50. Donc dans la formule néceſſaire pour trouver l'attraction du ſphéroïde à l'extrêmité de l'axe c, on pourra toujours ſuppoſer $\nu'^2 <$ ou > 1, puiſqu'il ſuffira pour cela de couper le ſphéroïde par des plans elliptiques paſſant par l'extrêmité de l'axe c, & perpendiculaires, ſoit au plan de c & de b, ſoit à celui de c & de a.

51. Donc en coupant le ſphéroïde d'abord par un plan perpendiculaire à celui des c & des b (ce que j'appellerai la *premiere méthode*), enſuite par un plan perpendiculaire à celui des c & des a (ce que j'appelle la *ſeconde méthode*), & combinant enſemble les art. 41 & 48, on aura les cas ſuivans:

I. $b > c > a$ (C) (L)
II. $c > b > a$ (C) (LC)
III. $a > b > c$ (L) (CL)
IV. $a > c > b$ (L) (C)
V. $b > a > c$ (CL) (L)
VI. $c > a > b$ (LC) (C)

Ce qui ſignifie que dans le cas de $b > c > a$, on aura, par la premiere méthode, $AT\frac{1}{,\mu}$ toujours circulaire, & par la ſeconde toujours logarithmique; que dans

le cas de $c > b > a$, on aura, par la premiere méthode, $AT\frac{1}{\mu}$ toujours circulaire, & par la feconde d'abord circulaire & enfuite logarithmique, &c. & ainfi des autres cas.

52. Donc il n'y a aucun de ces fix cas, où $AT\frac{1}{\mu}$ ne puiffe être uniquement circulaire ou uniquement logarithmique, fuivant qu'on employera la premiere ou la feconde méthode; & il y a même deux cas, favoir, le premier & le quatriéme, c'eft-à-dire, $b > c > a$, ou $a > c > b$, dans lefquels $AT\frac{1}{\mu}$ fera uniquement circulaire ou logarithmique, foit qu'on employe la premiere ou la feconde méthode, en obfervant feulement que fi cette quantité eft circulaire par l'une des deux méthodes, elle fera logarithmique par l'autre, quoique les deux méthodes enfemble doivent donner le même réfultat total pour l'attraction du fphéroïde à l'extrêmité de l'axe $2c$; ce qui nous fournira quelques remarques dans la fuite.

53. De plus, il eft clair par les art. 12 & 29, que dans le cas de $b > c > a$ (I), & dans celui de $a > c > b$ (IV), la différentielle qui multiplie la quantité angulaire ou logarithmique $AT\frac{1}{\mu}$, dépend d'un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique; que dans aucun cas cette différentielle ne dépend d'un fimple arc d'ellipfe ou d'hyperbole, & que dans tous

les autres cas, à l'exception des deux qu'on vient d'indiquer, elle dépend d'un arc d'ellipſe & d'un arc d'hyperbole à-la-fois.

54. On ſuppoſe dans l'article précédent que les coupes du ſphéroïde ſont perpendiculaires au plan de c & de b. Si elles l'étoient au plan de c & de a, alors les deux conditions de l'article précédent ſeroient, en mettant a pour b, & b pour a, $a>c>b$, & $b>c>a$, qui ſont préciſément les mêmes que les deux précédentes.

55. De-là, & de l'art. 52, il s'enſuit que les deux cas de $b>c>a$ (I), & $a>c>b$ (IV) ſont les deux cas qui donnent les réſultats les plus ſimples, puiſque d'une part la quantité $AT\frac{1}{\mu}$ eſt toujours logarithmique ou circulaire dans chacun de ces cas, & que de l'autre la quantité différentielle qui multiplie $AT\frac{1}{\mu}$. dépend uniquement dans ces deux cas d'un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, & dans tous les autres cas d'un arc d'ellipſe & d'un arc d'hyperbole.

56. La différentielle de la pag. 181, Tom. VI, *Opuſc.* ſe réduit en général à la forme $\frac{d\mu\sqrt{(A\mu^2+B)}}{\sqrt{(C\mu^2+D)}}\int\frac{d\mu}{E+F\mu\mu}$, μ^2 étant poſitif ou négatif. Or, en faiſant $A\mu^2+B=z$, on a $\mu^2=\frac{z-B}{A}$, ou (en ſuppoſant A négatif & $=-$

A') $\mu^2 = \frac{B-z}{A'}$, & la différentielle devient de cette forme $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(\pm z \mp b)}.\sqrt{(Gz+H)}} \int \frac{dz}{\sqrt{(\pm z \mp B)(L+Mz)}}$; nous avons vu de plus (art. 55) que la différentielle $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(\pm z \mp B)}.\sqrt{(Gz+H)}}$, se réduit, lorsque c est moyen entre a & b, à la forme $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(bb \pm fz - zz)}}$, dont l'intégrale, en supposant $u = \frac{b^2}{z}$ (Mém. Berl. 1746, p. 203, art. XX), est $-\frac{2\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}{\sqrt{u}}$ + un arc d'hyperbole, ou, ce qui est la même chose, $-\frac{2\sqrt{(bb \pm fz - zz)}}{\sqrt{z}}$ + un arc d'hyperbole, ou enfin $-2\sqrt{[(\pm z \mp b)(Gz+H)]}$ + un arc d'hyperbole; donc la différentielle proposée sera $d\,(arc.\,hyp.) \times \int \frac{dz}{\sqrt{(\pm z \mp B)}.(L+Mz)} - d\left(\frac{2\sqrt{[(\pm z \mp B).(Gz+H)}}{\sqrt{z}}\right) \int \frac{dz}{\sqrt{(\pm z \mp B)}.(L+Mz)}$. Or l'intégrale de cette derniere partie sera $-\frac{2\sqrt{[(\pm z \mp B).(Gz+H)]}}{\sqrt{z}} \times \int \frac{dz}{\sqrt{(\pm z \mp B)}.(L+Mz)} + \int \frac{2\,dz\sqrt{(Gz+H)}}{\sqrt{z}(L+Mz)}$, & cette derniere quantité s'intégre aisément par des arcs de cercle, ou des logarithmes.

57. Donc l'intégrale de la différentielle qui exprime l'attraction à l'extrémité de l'axe $2c$, dans le cas où c est moyen entre a & b, se réduit à des quantités logarithmiques ou circulaires, plus à la différentielle d'un

ſimple arc d'hyperbole, multipliée par une quantité toujours logarithmique ou toujours circulaire.

58. Dans le cas où $AT\frac{1}{\mu}$ eſt imaginaire, & ſe change (article 23) en une quantité logarithmique log. $\left(\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right)$, ſi on veut réduire la différentielle de la page 181, Tom. VI, *Opuſc.* à une forme analogue à celle de l'art. 13, on ſuppoſera log. $\left(\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right)=z$, ou $\frac{\mu'+1}{\mu'-1}=c^z$, ce qui donnera $\mu'+1=\mu'c^z-c^z$. & $\mu'=\frac{c^z+1}{1-c^z}$; ſubſtituant cette valeur, on aura une quantité beaucoup plus compliquée que celle de l'article 13, & dont l'intégration demeurera toujours très-difficile.

59. Lorſque $c=a$, ſi on coupe le ſphéroïde par des plans paſſant par l'extrêmité de l'axe $2c$, & perpendiculaires au plan de c & de a, on aura, par la méthode de M. Maclaurin, l'attraction du ſphéroïde, qui ſera celle de l'attraction à l'équateur dans un ſphéroïde de révolution, & qui ne renferme que des logarithmes ou des arcs de cercle. Mais dans ce même cas, ſi on coupe le ſphéroïde par des plans paſſans par l'extrêmité de l'axe $2c$, & perpendiculaires au plan de c & de b, alors, dans le cas de $b>c$, on auroit (à cauſe de $c=a$, qui donne $\zeta^2+\alpha^2\zeta^2=1$) la différentielle

rentielle $d\mu\sqrt{[\mu^2(1-\beta^2)-\beta^2]}\times AT\frac{1}{\mu}$, ou $d\mu\sqrt{(\alpha\mu^2-\beta^2)}\times AT\frac{1}{\mu}$ (art. 10), qui renferme une différentielle logarithmique multipliée par un arc de cercle; & dans le cas de $b<c$, on auroit (art. 29 & 30) $d\mu'\sqrt{[\mu'^2(\beta^2-1)-\beta^2]}\times \log.\left(\frac{\mu'+1}{\mu'-1}\right)$, qui renferme une différentielle logarithmique multipliée par une quantité logarithmique; & dans l'un & l'autre cas l'intégration reste très-difficile par la premiere méthode, quoiqu'elle soit très-facile par la seconde.

60. Enfin, si $a=b$, c'est-à-dire, si $\beta=1$, la différentielle sera $\frac{d\mu\sqrt{(-\beta^2)}}{\sqrt{(\beta^2\alpha^2\mu^2+\beta^2\alpha^2+\beta^2)}}\times AT\frac{1}{\mu}$, ou plutôt, en faisant $\beta^2=1$, & changeant les signes des radicaux $\frac{d\mu}{\sqrt{\left(\alpha^2\mu^2+\frac{b^2}{c^2}\right)}}\times AT\frac{1}{\mu}$, ou si $r'>1$, ce qui donne $b<c$, $\frac{d\mu'}{\sqrt{\left(\frac{b^2}{c^2}-\alpha^2\mu'^2\right)}}\times \log.\left(\frac{1+\mu'}{\mu'-1}\right)$; α^2 étant négatif; d'où l'on voit que l'intégration est encore très-difficile, quoique par la formule de la page 184, Tom. VI, elle devienne beaucoup plus simple.

61. On voit par-là combien le choix des méthodes, & des formules est essentiel pour parvenir d'une maniere plus simple & plus facile à la détermination de l'attraction d'un sphéroïde; & c'est ce qu'on va voir encore

par les recherches que nous allons faire sur l'intégration de la formule de la page 184, dont nous venons de parler.

62. Venons donc présentement à la formule de la page 184 du Tom. VI de nos *Opuscules*, laquelle donne d'une autre maniere l'attraction d'un sphéroïde elliptique dont tous les axes sont inégaux, & supposons d'abord σ réel; ce qui donne $\sqrt{(\pi\pi-1)}$ réel, ou $\pi^2>1$; car il est bon d'observer que dans la valeur de $\sigma\sigma=\frac{\pi\pi-1}{\pi^2}$, π^2 est toujours une quantité réelle & positive, puisque, $1-\sigma\sigma$ étant $=\frac{pp}{cc}$, & p étant un demi-diametre d'ellipse ainsi que c, $1-\sigma\sigma$, & par conséquent $\pi^2=\frac{1}{1-\sigma\sigma}$ est toujours positif.

63. Il faut observer de plus que dans tous les cas le dénominateur $\sqrt{(\delta^2-\epsilon^2\pi^2+1)}\times\sqrt{(\epsilon^2\pi^2-1)}$, (page 184 du Vol. cité), est $=\delta\delta$ cos. u sin. u, & par conséquent toujours réel. On doit seulement remarquer que si $\delta^2=\frac{bb}{aa}-1$ est négatif, c'est-à-dire, si $b<a$, (car $\epsilon^2=\frac{bb}{cc}$ est toujours positif) il faudra changer les signes des quantités qui sont sous les deux signes radicaux; car $\epsilon^2\pi^2-1=\frac{bb}{cc}\times\left[\frac{cc}{bb}(1+\delta^2 \text{cos.} u^2)\right]-1=\delta^2 \text{cos.} u^2$, & $\delta^2-\epsilon^2\pi^2+1=\delta^2+\delta^2 \text{cos.} u^2=\delta^2 \text{sin.} u^2$. Donc si δ^2 est négatif, on a $\delta^2=-k^2$,

$\varepsilon^2\pi^2 - 1 = -k^2 \operatorname{cof.} u^2$, & $\delta^2 - \varepsilon^2\pi^2 + 1 = -k^2 \operatorname{fin.} u^2$. Donc il faut changer les fignes des quantités qui font fous les deux fignes radicaux, afin que le produit (qui eft toujours réel) foit formé de deux quantités réelles.

64. On peut remarquer encore que $\log. \frac{1+\sigma}{1-\sigma} =$ $\log. [\pi + \sqrt{(\pi^2 - 1)}] - \log. [\pi - \sqrt{(\pi^2 - 1)}] =$ $\log. \left(\frac{\pi + \sqrt{(\pi^2 - 1)}}{\pi - \sqrt{(\pi^2 - 1)}}\right) = \log. [\pi + \sqrt{(\pi^2 - 1)}]^2 =$ $2 \log. [\pi + \sqrt{(\pi^2 - 1)}]$, π étant l'abfciffe de l'hyperbole dont l'axe eft 1, & $2 \log. [\pi + \sqrt{(\pi^2 - 1)}]$ repréfentant le fecteur correfpondant.

65. Si σ eft réel, alors foit fuppofé $\log. \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right) = z$, ce qui donnera $\frac{1+\sigma}{1-\sigma} = c^z$, & $\sigma = \frac{c^z - 1}{c^z + 1}$; foit $\sigma' = \frac{1}{\sigma} = \frac{\pi}{\sqrt{(\pi^2 - 1)}}$, on aura pour transformée

$$\frac{z\pi^2 d\sigma'}{\sqrt{[(\delta^2 - \varepsilon^2\pi^2 + 1)(\varepsilon^2\pi^2 - 1)]}},$$

quantité dans laquelle il faudra mettre pour σ & π^2, leurs valeurs en c^z.

66. Nous avons vu ci-devant comment les logarithmes fe changent en arcs de cercle, & réciproquement, lorfque σ eft imaginaire, ou σ^2 négatif. Ainfi nous ne nous arrêterons pas fur ce point; nous remarquerons feulement, 1°. que dans le cas où σ eft imaginaire, & σ^2 négatif, alors $\pi^2 - 1$ eft négatif, puifque $\pi^2 - 1 = \frac{\sigma\sigma}{1 - \sigma\sigma}$, quantité négative; d'où il s'enfuit que

comme la quantité log. $\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)$ renferme alors des quantités imaginaires, si on fait $\sigma = \frac{\sqrt{-1}}{\sigma'}$, cette quantité se change en $2\sqrt{-1}$ multiplié par l'arc p, dont la tangente est $\frac{1}{\sigma'}$; or, comme on a $\frac{1}{1-\sigma\sigma} = \pi^2$, on trouvera $\frac{1}{\sigma'} = \frac{\sqrt{(1-\pi^2)}}{\pi}$, $\sigma' = \frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi\pi)}}$, & $d\sigma' = \frac{d\pi}{(-\pi\pi+1)^{\frac{3}{2}}}$; donc puisque $\frac{1}{\sigma'} = \frac{\text{sin. } p}{\text{cos. } p}$, π sera le cosinus de l'angle p, & $\sqrt{(1-\pi^2)}$ son sinus, & la différentielle se réduira à $\frac{p\pi^2 d\sigma'}{\sqrt{(\delta^2-\iota^2\pi^2+1)}.\sqrt{(\iota^2\pi^2-1)}}$; donc, à cause de $\sigma' = \frac{\text{cosin. } p}{\text{sin. } p}$, & de $\pi^2 = \text{cos. } p^2$, on aura pour transformée une quantité de cette forme: $\frac{p\,dp\,\text{cos. } p^2}{\text{sin. } p^2 \sqrt{(A+B\,\text{cos. } p^2 + C\,\text{cos. } p^4)}}$, qu'on peut encore changer (en faisant $\text{cos. } p^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\text{cos. } 2p$, & $2p = v$) en

$$\frac{v\,dv\,(1+\text{cos. } v)}{(1-\text{cos. } v)\sqrt{(A'+B'\,\text{cos. } v + C'\,\text{cos. } v^2)}} = \frac{v\,dv\,(1+\text{cos. } v)}{(1-\text{cos. } v)\sqrt{(F+G\,\text{cos. } v + H\,\text{cos. } 2v)}}.$$

67. Mais comme toutes ces transformations, quoiqu'en apparence plus simples que la différentielle de la page 184, ne rendent pas l'intégration plus facile, nous allons nous borner à chercher l'intégrale de la quantité qui multiplie log. $\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)$ dans cette diffé-

rentielle; σ étant ſuppoſé réel ou imaginaire, c'eſt-à-dire, $\pi^2 >$ ou ≤ 1, & de plus (art. 62) δ^2 poſitif ou négatif.

68. Nous avons donc ici quatre cas à examiner,

1°. Celui de $\pi^2 > 1$ & de δ^2 poſitif.

2°. Celui de $\pi^2 > 1$ & de δ^2 négatif.

3°. Celui de $\pi^2 < 1$ & de δ^2 poſitif.

4°. Celui de $\pi^2 < 1$ & de δ^2 négatif.

69. Remarquons encore que, puiſqu'en général $\pi^2 = \frac{1}{1-\sigma\sigma}$, $\sigma\sigma$ étant poſitif ou négatif, & que $1-\sigma\sigma = \frac{\rho^2}{c^2}$, il s'enſuit que $\pi^2 > 1$ donne $\sigma\sigma < 1$, & par conſéquent $\frac{\rho^2}{c^2} < 1$, ou $c > \rho$; par la même raiſon $\pi^2 < 1$ donne $c < \rho$.

70. Donc, puiſque ρ eſt moyen entre a & b, il eſt clair que π ſera toujours > 1 ſi c eſt $> a$ & $> b$; π toujours < 1 ſi c eſt $< a$ & $< b$; & que π ſera alternativement $>$ & < 1, ſi c eſt $> a$ & $< b$, ou $> b$ & $< a$.

71. De plus, la condition de δ^2 poſitif exige que $b > a$: condition qui peut très-bien ſubſiſter avec celles de $\pi^2 >$ ou < 1, puiſque cette condition exige ſeulement que c ſoit $>$ ou $<$ que a & que b; ainſi on peut ſuppoſer à-la-fois $\pi^2 > 1$, ou $\pi^2 < 1$, & δ^2 poſitif.

72. Par la même raiſon, la condition de δ^2 négatif, exigeant $b < a$, cette condition pourra encore

subsister avec celle de $\pi^2 >$ ou < 1. De même, la condition de δ^2 positif subsistera avec la condition de $\pi^2 >$ & < 1 successivement, pourvu qu'on ait $c > a$ & $< b$, ce qui donne $b > c > a$; mais elle ne subsistera pas avec la condition de $c > b$ & $< a$, qui donne $a > c > b$, & par conséquent $a < b$. Parcourons maintenant ces différens cas, & premierement celui de $\pi^2 > 1$ & de δ^2 positif.

73. Dans ce cas, si l'on fait comme ci-dessus, $\frac{\pi}{\sqrt{(\pi^2 - 1)}} = \frac{1}{\sigma} = u$, on aura la différentielle exprimée en π, réduite à

$$\frac{u^2 du}{\sqrt{[(\delta^2 + 1)(u^2 - 1) - \epsilon^2 u^2]} . \sqrt{(\epsilon^2 u^2 - u^2 + 1)}},$$ qui, en faisant $u^2 = x$, & $\delta^2 + 1 = \omega^2$, dépend de la différentielle $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\omega^2 x - \epsilon^2 x - \omega^2)} . \sqrt{(\epsilon^2 x - x + 1)}}$, dans laquelle les quantités qui sont sous chacun des signes radicaux, sont positives, puisqu'elles viennent des quantités $\delta^2 - \epsilon^2 \pi^2 + 1$ & $\epsilon^2 \pi^2 - 1$, supposées positives l'une & l'autre.

74. Or, on pourra s'assurer aisément par les Mém. de Berlin de 1746, & par le Mém. précédent, §. III, si cette différentielle dépend de la rectification de l'ellipse seule, ou de l'hyperbole seule, ou de celle de toutes les deux.

75. En effet, soit $a^2 - \epsilon^2 = \gamma$, & $\epsilon^2 - 1 = \delta'$, c'est-à-dire, $\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{c^2} = \gamma$, & $\frac{b^2}{c^2} - 1 = \delta'$, on aura la

transformée $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\gamma x - \omega^2)}.\sqrt{(\delta' x + 1)}}$, dans laquelle $\gamma x - \omega^2$ & $\delta' x + 1$ sont positifs, & qui se réduira (Mém. précéd. §. III) à la rectification d'une ellipse, si elle peut avoir la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(f'x - xx - g'g')}}$, à celle d'une hyperbole, si elle peut avoir la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(xx - g'g' \pm f'x)}}$, ou la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\pm f'x - xx + g'g')}}$, & dans les autres cas, à celle des deux sections coniques à-la-fois.

76. Or on a $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\gamma x - \omega^2)}.\sqrt{(\delta' x + 1)}} = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{[\gamma\delta' xx + (\gamma - \delta'\omega^2)x - \omega^2]}}$; & puisque $\omega^2 = \beta^2 + 1 = \frac{b^2}{a^2}$ est toujours positif, il est clair que cette quantité se réduit à la rectification de l'ellipse seule, si $\gamma\delta'$ est négatif, & $\gamma - \delta'\omega^2$ positif, c'est-à-dire, si $\left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{c^2}\right) \times \left(\frac{b^2}{c^2} - 1\right)$, est négatif, & $\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{c^2} - \left(\frac{bb}{cc} - 1\right)\frac{b^2}{a^2}$ positif.

77. Or la premiere de ces conditions ne peut avoir lieu si γ est négatif & δ' positif, car alors $\gamma\delta'$ & $\gamma - \delta'\omega^2$ seroient négatifs l'un & l'autre, mais elle aura lieu si γ est positif & δ' négatif; c'est-à-dire, si $a^2 > c^2$

& $\epsilon^2 < 1$, ce qui donne $\frac{b^2}{a^2} > \frac{b^2}{c^2}$, & $\frac{b^2}{c^2} < 1$; donc $a < c$, & $c > b$.

78. Or cette condition eſt préciſément celle qui réſulte de $\pi^2 - 1$ toujours poſitif, b étant d'ailleurs $> a$, comme l'exige la condition de δ^2 poſitif; donc ſi $c > b > a$ (II) (art. 41), la différentielle peut ſe conſtruire par un arc ſimple d'ellipſe.

79. Pour la réduction à un arc ſimple d'hyperbole, il faut que $\gamma \delta'$ ſoit poſitif, c'eſt-à-dire, γ & δ' tous deux poſitifs, car ils ne peuvent être tous deux négatifs, puiſqu'alors $\gamma - \delta' \omega^2$ ſeroit négatif dans la formule de l'art. 75. Donc $\omega^2 - \epsilon^2$ & $\epsilon^2 - 1$ doivent être tous deux poſitifs, c'eſt-à-dire, $\frac{bb}{aa} - \frac{bb}{cc}$, & $\frac{bb}{cc} - 1$, tous deux poſitifs; donc $c > a$ & $b > c$; or cette condition a lieu lorſque $\pi^2 - 1$ eſt poſitif, & δ^2 poſitif, en obſervant ſeulement que π^2 ne ſera > 1 que dans une partie du ſphéroïde.

80. Comme $\omega^2 = \delta^2 + 1$ eſt toujours poſitif, étant $= \frac{b^2}{a^2}$, on voit aiſément que la propoſée ne peut ſe réduire à la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(b^2 \pm fx - xx)}}$, qui dépendroit auſſi de la rectification de l'hyperbole ſeule; mais combinée avec une quantité algébrique (Mém. de Berlin, 1746, pag. 203, art. XX).

81. Il eſt clair auſſi qu'à cauſe de la quantité néga-

tive

tive $-\omega^2$, le radical de l'art. 75 ne peut jamais être rationnel.

82. Donc si π^2 est toujours > 1 & δ^2 positif, c'est-à-dire, si $c > b > a$ (II) (art. 41), la différentielle dépend d'un simple arc d'ellipse, & si δ^2 est positif & $\pi^2 > 1$, c'est-à-dire, si $b > c > a$ (I) (art. 41), la différentielle dépend d'un simple arc d'hyperbole, mais π^2 ne sera > 1 que dans une partie du sphéroïde & < 1 dans l'autre.

83. Supposons présentement $\pi^2 > 1$ & δ^2 négatif, & la différentielle de l'art. 73 sera, en changeant les signes des quantités qui sont sous les radicaux au dénominateur, $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega^2 x + \varepsilon^2 x)} \cdot \sqrt{(x - \varepsilon^2 x - 1)}}$, qui se réduira à un arc simple d'ellipse, si on peut supposer le radical de la forme $\sqrt{(\alpha - x)} \cdot \sqrt{(x - \beta)}$, α étant $> x > \beta$; ce qui donne, 1°. $\varepsilon^2 - \omega^2$ négatif; 2°. $1 - \varepsilon^2$ positif; d'où $\frac{bb}{cc} < \frac{b^2}{a^2}$, & $1 > \frac{b^2}{c^2}$; 3°. $\frac{\omega^2}{\omega^2 - \varepsilon^2} > \frac{1}{1 - \varepsilon^2}$, ou $\omega^2 \varepsilon^2 < \varepsilon^2$, ou $\omega^2 < 1$, ou $b < a$, ce qui résulte déja de δ^2 négatif. Donc $c > b$, $c > a$, & $b < a$: conditions qui subsisteront en supposant $\pi^2 - 1$ toujours positif, & de plus δ^2 négatif, donc $c > a > b$ (VI) (art. 41). Donc dans ce cas de $c > a > b$, la proposée se construit par un simple arc d'ellipse.

84. Pour la réduction à un simple arc d'hyperbole, il faut que la différentielle puisse se réduire à la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-\alpha)}.\sqrt{(x+\zeta)}}$, qui donne $\varepsilon^2-\omega^2$ positif & $1-\varepsilon^2$ positif, c'est-à-dire, $\frac{bb}{cc}>\frac{b^2}{a^2}$, & $1>\frac{b^2}{c^2}$; donc $a>c$, & $c>b$; donc $a>c>b$ (IV) (art. 41); ce qui donne $a>b$, comme l'exige la supposition de δ^2 négatif. Dans ce cas de $a>c>b$, π^2 n'est >1, que dans une partie du sphéroïde.

85. La réduction à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, est impossible, par les mêmes raisons que dans l'art. 80, à cause du signe négatif de ω^2.

86. Examinons présentement le cas où $\sqrt{(\pi^2-1)}$, étant imaginaire, c'est-à-dire, le cas où σ^2 est négatif, la différentielle doit se changer en $\frac{\pi^2 d\pi}{(-\pi\pi+1)^{\frac{1}{2}}}\times$

$\frac{1}{\sqrt{(\delta^2-\varepsilon^2\pi^2+1)}.\sqrt{(\varepsilon^2\pi^2-1)}}$, ce qui suppose (art. 62) que δ^2 est positif.

87. En faisant $\frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}}=u$, ce qui donne $\pi^2=\frac{u^2}{1+u^2}$, la transformée sera

$$\frac{u^2du}{\sqrt{[(\delta^2+1)(u^2+1)-\varepsilon^2u^2]}.\sqrt{(\varepsilon^2u^2-u^2-1)}},$$ qui, en faisant $u^2=x$ & $\delta^2+1=\omega^2$, dépend de la différen-

tielle $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(\alpha^2 x - \varepsilon^2 x + \alpha^2)}.\sqrt{(\varepsilon^2 x - x - 1)}}$, sur laquelle on fera des opérations analogues aux précédentes, pour savoir si elle est réductible à un simple arc d'ellipse ou à un simple arc d'hyperbole, ou à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique.

88. On verra donc que pour la réduction à un simple arc d'ellipse, il faut que la différentielle se réduise à cette forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-\alpha)}.\sqrt{(\beta-x)}}$; donc $\varepsilon^2 - 1$ doit être positif, & $\alpha^2 - \varepsilon^2$ négatif, c'est-à-dire, $\frac{bb}{cc} > 1$, & $\frac{bb}{aa} < \frac{bb}{ca}$. Donc $b > c$ & $c < a$; de plus, δ^2 étant positif (*hyp.*), on a $b > a$; donc $b > a > c$, ce qui donne π^2 toujours > 1. Donc si on a $b > a > c$ (V) (art. 41), la différentielle dépend d'un simple arc d'ellipse. Pour la réduction de la même différentielle à un simple arc d'hyperbole, il faut que la différentielle se réduise à $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x-\alpha)}.\sqrt{(x+\beta)}}$, ce qui donne $\varepsilon^2 - 1$ positif, & $\alpha^2 - \varepsilon^2$ positif, ou $b > c$ & $c > a$, donc $b > c > a$ (I) (art. 41); condition qui suppose que π^2 ne sera < 1 que dans une partie du sphéroïde. Pour la réduction à un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, il faudroit que la différentielle se réduisît à la forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(x+\beta)}.\sqrt{(\alpha-x)}}$, qui est impossible ici, où π^2 est positif.

89. Supposons enfin $\pi^2 < 1$, & δ^2 négatif, ce qui exige (art. 62) qu'on change les signes dans les radicaux du dénominateur de l'art. 87, & la différentielle sera $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{[-\omega^2+\varepsilon^2 x-\omega^2 x.\sqrt{(1+x-\varepsilon^2 x^2)}]}}$, qui se réduira à un simple arc d'ellipse, si le radical peut être supposé de la forme $\sqrt{(\alpha-x)}.\sqrt{(x-\beta)}$, c'est-à-dire, si $1-\varepsilon^2$ est négatif, & $\varepsilon^2-\omega^2$ positif; ce qui donne $1 < \frac{b^2}{c^2}$ & $\frac{b^2}{c^2} > \frac{b^2}{a^2}$, ou $c < b$ & $a > c$; donc $a \gtrless b > c$ (III) (art. 41), ce qui s'accorde avec la supposition de δ^2 négatif, & de $\pi^2 - 1$ toujours négatif.

90. Pour la réduction à un arc simple d'hyperbole, il faut que le radical se réduise à la forme $\sqrt{(x-\alpha)}.\sqrt{(x+\beta)}$, ce qui donne $1-\varepsilon^2$ positif, & $\varepsilon^2-\omega^2$ positif; ou $1 > \frac{b^2}{c^2}$ & $\frac{b^2}{c^2} > \frac{b^2}{a^2}$; donc $c > b$ & $a > c$; donc $a > c > b$ (IV) (art. 41); ce qui s'accorde encore avec la supposition de δ^2 négatif, & de $\pi^2 \lesseqgtr 1$ dans une partie seulement du sphéroïde.

91. Le terme négatif $-\omega^2$, rend impossible la réduction à un arc d'hyperbole, combiné avec une quantité algébrique.

92. Donc la proposée sera réductible à un simple arc d'ellipse si on a

(art. 78) $c > b > a$ (II.) (L),
(art. 83) $c > a > b$ (VI.) (L),
(art. 88) $b > a > c$ (V.) (C),
(art. 89) $a \gtrless b \gtrless c$ (III.) (C);

& à un simple arc d'hyperbole, si on a
(art. 79 & 87) $b > c > a$ (I.) (LC), ou (CL),
(art. 84 & 90) $a > c > b$ (IV.) (LC), ou (LC).

Mais dans ces deux derniers cas, comme c est plus grand que l'un des deux demi-axes a, b, & plus petit que l'autre, π^2 sera successivement $<$ & > 1, & la quantité qui multiplie la différentielle sera successivement logarithmique & circulaire. Dans les quatre autres cas, la quantité qui multiplie la différentielle sera seulement, ou logarithmique, ou circulaire, comme le marquent les signes (L), (C), (LC), &c.

93. Donc dans tous les cas possibles de l'inégalité des trois diametres, la différentielle qui multiplie la quantité logarithmique ou circulaire, est réductible à un simple arc d'ellipse, ou à un simple arc d'hyperbole; mais dans ce dernier cas, la quantité qui multiplie la différentielle sera successivement logarithmique & circulaire.

94. Donc dans tous les cas où c est $> a$ & $> b$, ou bien dans lesquels $c < a$ & $< b$, on pourra réduire l'attraction élémentaire du sphéroïde à une différentielle d'arc d'ellipse, multipliée par une quantité logarithmique ou circulaire.

95. Et dans les cas où c est moyen entre les deux axes, on pourra réduire cette attraction élémentaire, ou (art. 92) à la différentielle d'un arc simple d'hyperbole multiplié par une quantité successivement logarithmique & circulaire, ou (art. 53) à la différen-

tielle d'un arc d'hyperbole combiné avec une quantité algébrique, multipliée par une simple quantité logarithmique ou circulaire, ce qui est beaucoup plus simple.

96. Donc dans le cas où c est $>a$ & $>b$, ou bien $c<a$ & $<b$, il faudra employer de préférence (art. 92) la formule de la page 184 du Tom. VI de nos *Opuscules*, après avoir simplifié cette formule par les réductions des art. 78, 83, 88 & 89; & dans le cas où c est moyen entre a & b, il faudra employer de préférence (art. 51) la formule de la page 181 du même Volume.

97. Combinant maintenant sous un même point de vue les trois méthodes, savoir, les deux de l'art. 51, & celle des coupes par l'axe $2c$, que j'appelle la troisiéme méthode, on aura (art. 51 & 92)

I. $b>c>a$ $(C)(L)(LC)$ ou (CL),
II. $c>b>a$ $(C)(LC)(L)$,
III. $a>b>c$ $(L)(CL)(C)$,
IV. $a>c>b$ $(L)(C)(LC)$ ou (CL),
V. $b>a>c$ $(CL)(L)(C)$,
VI. $c>a>b$ $(LC)(C)(L)$.

98. Donc de ces six formules, la premiere & la quatriéme donnent, indépendamment des quantités purement logarithmiques ou circulaires (art. 56 & 96), la différentielle d'un arc d'hyperbole multiplié par une quantité purement logarithmique ou circulaire, & les

quatre autres donnent la différentielle d'un arc simple d'ellipse, multiplié par une quantité purement logarithmique ou circulaire.

99. Il ne sera pas difficile par les formules que nous avons données dans les Mém. de Berlin de 1746, & dans le Mém. précéd. §. III, de trouver les axes de l'ellipse & de l'hyperbole dont la rectification donne l'intégrale des différentielles trouvées dans les articles précédens. Par exemple, dans le premier cas (art. 74), on aura le radical de cette forme $\sqrt{\left(x-\frac{\omega^2}{\omega^2-\varepsilon^2}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{1}{1-\varepsilon^2}-x\right)}$, $\omega^2-\varepsilon^2$ étant positif, & $1-\varepsilon^2$ positif, de sorte que l'équation $fr-rr=bb$ des Mém. de Berlin, 1746, pour trouver les demi-axes r & b de l'ellipse, donne $b^2=\frac{\omega^2}{(\omega^2-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)}$; $f=\frac{\omega^2}{\omega^2-\varepsilon^2}+\frac{1}{1-\varepsilon^2}=\frac{2\omega^2-\varepsilon^2-\varepsilon^2\omega^2}{(\omega^2-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)}$; donc r ou $\frac{f}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{f^2}{4}-bb\right)}$, donne l'axe $2r=f+\sqrt{(f^2-4bb)}=\frac{2\omega^2-\varepsilon^2-\varepsilon^2\omega^2\pm(\varepsilon^2-\varepsilon^2\omega^2)}{(\omega^2-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)}=\frac{2\omega^2}{\omega^2-\varepsilon^2}$, ou $\frac{2}{1-\varepsilon^2}$. On se souviendra que $1-\varepsilon^2=1-\frac{b^2}{c^2}$, & que $\omega^2=\delta^2+1=\frac{bb}{aa}$; l'unité est représentée ici par la quantité constante qui est $=\frac{uu}{x}$, puisque $uu=x$. Il en sera de même des autres cas.

100. On peut remarquer encore que uu ou (art. 74) $\pm \frac{1}{ee} = \frac{1}{1 - \frac{\rho\rho}{cc}}$, ou $\frac{1}{\frac{\rho\rho}{cc} - 1}$, d'où $u = \frac{c}{\sqrt{(cc - \rho\rho)}}$, ou $\frac{c}{\sqrt{(\rho\rho - cc)}}$, c'est-à-dire, égal au demi-axe c divisé par l'excentricité de l'ellipse dont les demi-axes sont c, ρ.

101. A l'égard des abscisses z de cette ellipse, prises sur l'axe r, elles seront données (Mém. de Berlin, 1746) par l'équation $rx = rr + \left(\frac{bb}{rr} - 1\right) zz$, ou $\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \epsilon^2} uu = \frac{\alpha^4}{(\alpha^2 - \epsilon^2)^2} + \left[\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - \epsilon^2)(1 - \epsilon^2)} \times \frac{(\alpha^2 - \epsilon^2)^2}{\alpha^4} - 1\right] zz$, ou enfin $\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \epsilon^2} \times \frac{1}{ee} = \frac{\alpha^4}{(\alpha^2 - \epsilon^2)^2} + \left[\frac{(\alpha^2 - 1)\epsilon^2}{\alpha^2(1 - \epsilon^2)}\right] zz$.

102. Il est aisé de voir par nos formules de la page 184 du Tom. VI, *Opusc.* que dans un secteur du sphéroïde infiniment petit & allongé, l'attraction à l'extrémité de l'axe dépend des logarithmes, & que si les ellipses sont applaties, elle dépend des arcs de cercle; on voit au contraire que dans la méthode des coupes elliptiques, pag. 178, art. 104, l'attraction dépend des arcs de cercle, si les ellipses sont allongées; & des logarithmes si elles sont applaties; c'est que dans le premier cas l'attraction a pour élément $\frac{dy \sin. y \cos. y^2}{1 + \alpha \cos. y^2}$, qui dépend des logarithmes, si α est

négatif,

négatif, ce qui arrive quand l'ellipſe eſt allongée, & que dans le ſecond cas l'attraction a pour élément $\frac{dy \text{ coſ.} y^3}{1 + \alpha' \text{ coſ.} y^2}$, & que cette derniere, en faiſant coſ. $y^2 =$ $1 -$ ſin. y^2, devient $\frac{dy \text{ coſ.} y (1 - \text{ſin.} y^2)}{1 + \alpha' - \alpha' \text{ ſin.} y^2}$; dont le dénominateur (qui ne peut jamais être négatif dans ſa totalité) devient $A + B$ ſin. y^2, ſi α' eſt négatif; ce qui arrive quand l'ellipſe eſt allongée; de ſorte que l'intégration dépend alors des arcs de cercle.

103. Nous avons vu juſqu'ici qu'on peut employer trois méthodes pour déterminer l'attraction à l'extrêmité de l'axe $2c$; celle des coupes elliptiques paſſant par cette extrêmité, & perpendiculaire au plan de c & de b; celle des coupes elliptiques paſſant par cette même extrêmité, & perpendiculaire au plan de c & de a; enfin, celle des tranches elliptiques qui ont toutes $2c$ pour axe commun.

104. On a vu de plus que chacune de ces méthodes, donne dans les différentielles, ou des logarithmes ſeulement, ou des arcs de cercle ſeulement, ou alternativement l'un & l'autre ſelon les différens cas, quoiqu'on puiſſe toujours, parmi ces trois méthodes, en choiſir une qui ne donne que des logarithmes ou que des arcs de cercle.

105. La différence de ces formules eſt d'autant plus digne de remarque, que le réſultat de ces trois méthodes doit être le même, quoique les expreſſions des

différentielles soient très-peu semblables, les unes contenant des arcs de cercle, les autres des logarithmes.

106. On pourroit croire que la difficulté de trouver l'attraction d'un sphéroïde dont tous les axes sont inégaux, tient à ce mêlange alternatif des quantités logarithmiques ou circulaires dans les expressions de la différentielle, & à la difficulté de passer de l'un à l'autre, dans le cas où le résultat est LC, ou à transformer un résultat dans l'autre, lorsque l'un est L, & l'autre C, ou réciproquement.

107. Cette idée pourroit être fondée jusqu'à un certain point; cependant elle ne le seroit pas toujours dans des calculs de cette espece, car supposons, par exemple, qu'on ait à intégrer la différentielle $\frac{x^2 dx}{1+\rho xx}$ $\int \frac{dx}{1+\rho xx}$, ρ étant successivement positif & négatif; il est clair que dans le premier cas on aura des arcs de cercle dans la formule, & dans le second des logarithmes; cependant l'intégrale absolue est en général celle de $\frac{dx}{\rho}\left(1 - \frac{1}{1+\rho xx}\right) \times \int \frac{dx}{1+\rho xx}$, laquelle, en regardant d'abord ρ comme constant, & x seulement comme variable, est $\frac{x}{\rho}\int\frac{dx}{1+\rho xx} - \int \frac{x\,dx}{\rho(1+\rho xx)}$ $- \frac{1}{\rho}\left(\int\frac{dx}{1+\rho xx}\right)^2 + R$, R étant une constante qui dépend de ρ; dans cette quantité, le terme

$\int \frac{x\,dx}{p(1+pxx)} = \frac{1}{2p^2} \log.(1+pxx)$, & il eſt évident que $\int \frac{dx}{1+pxx}$ exprimera un arc de cercle ou un logarithme; l'arc de cercle étant $\frac{1}{\sqrt{p}} AT.x\sqrt{p}$, & le logarithme $\frac{1}{\sqrt{p'}} \log.\left(\frac{1+x\sqrt{p'}}{1-x\sqrt{p'}}\right)$, en ſuppoſant $p' = -p$; de maniere que, ſi p eſt enſuite ſuppoſée variable, & ſucceſſivement poſitive & négative, on repaſſera aiſément de l'expreſſion logarithmique à l'expreſſion circulaire, ou réciproquement.

108. On peut même, ce qui eſt à la vérité un peu plus difficile, transformer en arc circulaire, ou réciproquement l'intégrale d'une différentielle qui renferme des logarithmes ou des arcs de cercle. Prenons pour exemple un cône dont on veut chercher la ſolidité; on ſait que, ſi l'on nomme x & y les abſciſſes & les ordonnées du triangle générateur de ce cône, priſes depuis le ſommet du triangle, & qu'on appelle 2π le rapport de la circonférence au rayon, on aura la ſolidité du cône $= \frac{xyy \times \pi}{3}$; ou $\frac{x^3\pi\alpha^2}{3}$, en ſuppoſant $y = \alpha x$, de maniere que $\frac{c^3\alpha^2\pi}{3}$ ſera la ſolidité totale, en prenant c pour la hauteur du cône. Maintenant imaginons qu'on coupe ce cône parallèlement à ſon axe, c'eſt-à-dire, aux x, on formera des hyperboles, dont les aires ſeront, comme l'on ſait, exprimées par des

quantités logarithmiques, & si on appelle A ces différentes aires, on aura $\int A dy$ pour la solidité du cône, ou plutôt $\int -A dy$, parce que, y croissant, ces aires diminuent. Supposons, pour plus de simplicité, que le triangle générateur soit isoscele, & faisons $y' = c - y$, (c étant le rayon de la base du cône, égal (*hyp.*) à la hauteur); on aura l'abscisse totale de chaque hyperbole (prise depuis le centre) $= c$, l'ordonnée $= \sqrt{(2cy' - y'y')}$, & le demi-axe transverse de chaque hyperbole $= y = c - y'$, d'où il est aisé de voir que l'hyperbole sera équilatere, puisque le quarré de l'abscisse c^2, moins le quarré de l'axe $(c - y')^2$, est égal au quarré de l'ordonnée $2cy' - y'y'$. Or soit $dz\sqrt{(zz - aa)}$ l'élément de l'aire d'une hyperbole équilatere, on sait que l'intégrale de cette quantité est $\frac{z\sqrt{(zz-aa)}}{2} - \int \frac{a^2 dz}{2\sqrt{(zz-aa)}} = \frac{z\sqrt{(zz-aa)}}{2} + \frac{a^2}{2} \log. \left(\frac{z - \sqrt{(zz-aa)}}{a}\right)$; substituant $c - y'$ pour a, & c pour z, on aura l'aire A de l'hyperbole dont il s'agit, $= \frac{c\sqrt{(2cy' - y'y')}}{2} + \frac{(c-y')^2}{2} \log. \left(\frac{c - \sqrt{(2cy' - y'y')}}{c - y'}\right)$; donc $A dy' = \frac{c dy' \sqrt{(2cy' - y'y')}}{2} + \frac{dy'(c-y')^2}{2} \log. \left(\frac{c - \sqrt{(2cy' - y'y')}}{c - y'}\right)$. La premiere partie renfermera visiblement des arcs de cercle dans son intégrale. A l'égard de la seconde, il faut d'abord, pour la sim-

plifier, mettre y à la place de $c - y$, & elle deviendra $-\frac{y^2 dy}{2}\log.\left(\frac{c-\sqrt{(cc-yy)}}{y}\right)$, ou $y^2 dy$ $\int\left(-\frac{dy}{y}+\frac{ydy}{\sqrt{(cc-yy)}}\times\left[\frac{1}{c-\sqrt{(cc-yy)}}\right]\right)$, faisant $c-\sqrt{(cc-yy)}=u$, on aura $yy=2cu-uu$, & la transformée sera $(cdu-udu)\sqrt{(2cu-uu)}$, multiplié par $\int-\frac{cdu+udu}{2cu-uu}+\int\frac{du}{u}=(cdu-udu)\times$ $\sqrt{(2cu-uu)}\times\int\frac{cdu}{2cu-uu}=y^2dy\int\frac{cdu}{2cu-uu}$, dont l'intégrale est $\frac{y^3}{3}\log.\left(\frac{c-\sqrt{(c^2-y^2)}}{y}\right)-\int\frac{y^3}{3}\times$ $\frac{cdu}{2cu-uu}+B$, B étant une constante qui rende l'intégrale $=0$, lorsque $y=c$, & complette lorsque $y=0$. Or il est visible, sans aller plus loin, que la partie qui est sous le signe $\int$ renfermera, par la substitution de $\sqrt{(2cu-uu)}$, au lieu de y, le radical $\sqrt{(2cu-uu)}$, & sera par conséquent intégrable par des arcs de cercle; & que la partie logarithmique est nulle lorsque $y=c$, & son coefficient y^3, lorsque $y=0$. Ainsi les logarithmes disparoîtront de l'intégrale totale, & les arcs de cercle prendront leur place.

109. La transformation des deux intégrales l'une dans l'autre seroit encore plus remarquable & plus digne d'attention, dans le cas où l'on ne chercheroit pas la solidité totale du cône, mais celle d'une partie

feulement, par exemple, d'un onglet quelconque qui feroit formé par une hyperbole parallèle à l'axe; & dont la folidité doit fe trouver également par les fegmens hyperboliques parallèles à l'axe & par les fegmens circulaires perpendiculaires au même axe. Nous venons de donner la maniere de trouver cette folidité par les fegmens hyperboliques; à l'égard des fegmens circulaires, il eft clair que fi on appelle b la diftance de l'axe du cône à la plus grande & derniere des hyperboles, & $b+z$ le rayon de chaque cercle, on aura $\sqrt{(b^2+2bz+zz-b)^2}=\sqrt{(2bz+zz)}$, pour l'ordonnée; en forte que la queftion fe réduira à trouver l'intégrale de Bdz, B étant le fegment d'un cercle dont le rayon eft $b+z$, & l'ordonnée $\sqrt{(2bz+zz)}$; & à comparer enfuite l'intégrale de Bdz, avec celle de Ady qui doit lui être égale. C'eft un calcul que nous abandonnons à nos Lecteurs, & dont il nous fuffit d'avoir indiqué le procédé par le calcul précédent pour la folidité totale du cône.

140. Au refte, ces calculs nous font voir, non-feulement comment, dans certains réfultats analytiques, les quantités logarithmiques fe transforment en circulaires, & réciproquement, mais encore que lorfqu'on a à intégrer une quantité de cette forme $dpdq \times \varphi(p, q)$, il n'eft pas indifférent, pour la fimplicité du calcul, de commencer l'intégration par p ou par q; car on voit que la mefure de la folidité totale du cône, par les fegmens hyperboliques, eft beaucoup plus compliquée que

cette même mesure par des segmens circulaires perpendiculaires à l'axe.

§. III.

Différentes manieres de calculer l'attraction des Sphéroïdes elliptiques, avec des Recherches sur l'attraction de quelques autres Sphéroïdes.

Ce paragraphe étant une suite du précédent, j'y conserverai l'ordre des numéros des articles.

111. Je joindrai ici différens essais pour trouver l'attraction d'un sphéroïde elliptique, essais dont le succès n'a pas à la vérité été tel que je le souhaitois, mais desquels il est néanmoins résulté quelques recherches qui pourront intéresser les Mathématiciens, & leur fournir ou leur occasionner des vues plus heureuses que les miennes.

112. Soit un sphéroïde elliptique qui ne soit pas de révolution, & dont les axes soient $a<b<c$, il est clair que le demi-axe b est moyen entre a & c, & qu'ainsi dans l'ellipse dont les demi-axes sont a & c, il y aura un demi-diametre $\omega=b$; par conséquent l'ellipse qui aura pour demi-axes ω & b, sera un cercle, & les coupes paralleles à ce cercle seront aussi des

cercles. J'avois d'abord imaginé de chercher l'attraction du sphéroïde à l'extrêmité du diametre qui passe par les centres de ces cercles, parce que cette attraction étant, par le théorême de Maclaurin, en raison donnée avec les attractions dans l'axe, on auroit pu tirer de-là l'attraction du sphéroïde dans l'axe. Mais j'ai bientôt reconnu que ce moyen étoit pour le moins fort laborieux, & vraisemblablement ne donneroit aucun résultat satisfaisant ; car l'attraction de la seule circonférence d'un cercle sur un point qui n'est pas placé immédiatement au-dessus du centre, dépend de la rectification d'une ellipse ; & de plus, après cette intégration, il faut encore intégrer par deux autres variables successivement.

113. En effet, soit (Fig. 14) $CA = r$, $CB = b$, $BD = a$, élevée perpendiculairement au plan du cercle dont le rayon est r, l'attraction que le point Z exerce sur D, suivant DB, sera, en faisant l'angle $ACZ = z$, proportionnelle à $\frac{rdz}{(aa+bb-2br\,\text{cos}.\,z+rr)^{\frac{3}{2}}}$, soit $aa+bb+rr-2br\,\text{cos}.\,z = rx$; on aura $\text{cos}.\,z = \frac{aa+bb+rr-rx}{2br}$; & la transformée sera $+\frac{rdx}{2b.r^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}} : \sqrt{\left[1-\left(\frac{aa+bb+rr-rx}{2br}\right)^2\right]}$. Soit $aa+bb+rr = rA$; & comme $aa+bb+rr$ est $> 2br$, puisque $bb-2br+rr$ est toujours positif, la transformée,

formée, en mettant à part les constantes, sera $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(1-\frac{AA+2Ax-xx}{4bb}\right)}}$, où la quantité $1-\frac{AA}{4bb}$ est négative, à cause de $A>2b$. Soit $2b=B$, il s'agit donc d'intégrer $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(BB-AA+2Ax-xx)}}$; or l'intégrale est $-\frac{\sqrt{(B^2-A^2+2Ax-xx)}}{\sqrt{x}.(B^2-A^2)}-\int\frac{\frac{1}{2}dx\sqrt{x}}{(B^2-A^2)\sqrt{(B^2-A^2+2Ax-xx)}}$, ou $\frac{\sqrt{(B^2-A^2+2Ax-xx)}}{A^2-B^2}+\int\frac{\frac{1}{2}dx\sqrt{x}}{(A^2-B^2)\sqrt{(B^2-A^2+2Ax-xx)}}$; or puisque A est $>B$, B^2-A^2 est négatif. Donc (*Mém. de Berlin*, 1746, & *Mémoire précédent*) la différentielle $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(B^2-A^2+2Ax-xx)}}$ dépend de la rectification d'une ellipse, dont un des demi-axes est $\sqrt{(A^2-B^2)}$, & dont l'autre, que j'appelle r', est tel que $2Ar'-r'r'=A^2-B^2$, ce qui donne $(r'-A)^2=B^2$, & $r'=A\pm B$; on voit de plus que $A^2-B^2=\frac{(aa+bb+rr)^2-4bbrr}{rr}$, & que $A\pm B=\frac{aa+(b\pm r)^2}{r}$.

114. L'attraction du point D parallèlement à DB, dépendra de l'intégration de $\frac{dz\ \text{cof.}\ z}{(aa+bb+rr-2br\ \text{cof.}\ z)^{\frac{3}{2}}}$,

& sera encore plus compliquée que la précédente ; puisqu'elle dépendra, comme il est aisé de le voir, d'une quantité de cette forme $\frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma xx)}}$, & par conséquent (Mém. de Berlin, 1746) de la rectification d'une ellipse & d'une hyperbole.

115. Si $b=ma$, m étant un nombre constant, ce qui arrive, quand le diametre (art. 112) passe par les centres de tous les cercles, on trouvera aisément que la différentielle de l'attraction du sphéroïde est

$$\frac{ardrdadz}{(aa+m^2aa-2mar \operatorname{cof.} z+rr)^{\frac{3}{2}}}$$ parallèlement à DB, &

$$\pm\frac{r^2drdadz \operatorname{cof.} z \mp rdrdadz \times ma}{(aa+m^2aa-2mar \operatorname{cof.} z+rr)^{\frac{3}{2}}}$$ parallèlement à BC.

116. N'ayons égard ici qu'à la premiere de ces quantités. On pourroit essayer de l'intégrer en regardant d'abord r seule comme variable ; ce qui donnera une intégrale algébrique, parce qu'en général l'intégrale de $\frac{rdr}{(A+Br+Crr)^{\frac{3}{2}}}$ est algébrique ; on mettroit ensuite dans cette intégrale, au lieu de r sa valeur $\sqrt{(Ba-Daa)}$, & on intégreroit en ne regardant que a comme variable ; enfin on intégreroit de nouveau par rapport à z. Mais il est aisé de voir que dès la seconde différentielle l'intégration seroit déja très-compliquée, à cause de la quantité $2mar$, qui renfermeroit un signe radical, & qui seroit encore elle-même sous

un signe radical. Ainsi il n'y a pas d'apparence que cette méthode conduise à un résultat plus simple que les précédens.

117. D'ailleurs cette méthode, quand elle réussiroit, ne donneroit pas en général l'attraction du sphéroïde à l'extrêmité des trois axes, mais seulement à l'extrêmité des axes $2a$ & $2c$, entre lesquels on suppose que l'axe $2b$ est moyen. Ainsi le problême général ne seroit pas résolu, puisqu'il faudroit nécessairement, pour trouver l'attraction à l'extrêmité de l'axe $2c$, que l'axe $2a$ ou l'axe $2b$ fût moyen entre les deux autres; donc si les axes $2a$, $2b$, sont les deux axes extrêmes pour la valeur, c'est-à-dire, si $a > c > b$, ou $b > c > a$, on ne pourroit, par la méthode dont il s'agit, trouver l'attraction à l'extrêmité de l'axe $2c$, moyen entre les deux autres.

118. Si on supposoit (art. 116) $Daa = aa + m^2 a^2$, les formules se simplifieroient, mais l'intégration resteroit toujours très-difficile, & d'ailleurs ce cas de $Daa = aa + m^2 a^2$ n'appartiendroit qu'à un sphéroïde particulier.

119. Nous pouvons ici remarquer en passant, que dans un sphéroïde elliptique dont les axes a, b, c, sont inégaux, & dans lequel un des axes quelconque b est moyen entre les deux autres a, c, on pourra toujours trouver de chaque côté de l'axe c, & à égale distance de cet axe, un plan perpendiculaire au plan de a & de c, & qui forme une section circulaire dans le sphé-

roïde. Il ne feroit pas non plus difficile de prouver que ces deux plans circulaires font les feuls qu'on puiffe former dans le fphéroïde, & que le plan circulaire ne peut jamais être oblique au plan de *a* & de *c*. En effet, on s'affurera aifément par le calcul, que pour que les rayons de la fection ainfi formée foient égaux, c'eft-à-dire, pour que leur valeur foit indépendante de l'angle que ces rayons font entr'eux, il faut que tous ces rayons fe trouvent dans un plan perpendiculaire à celui de *a* & de *c*. On peut confidérer encore que toutes les fections parallèles à la fection circulaire qui paffe par le centre, feront auffi circulaires, & que tous leurs centres feront dans la même ligne droite. Or de-là il eft aifé de faire voir que le plan des axes *a* & *c*, fera perpendiculaire au plan de la fection.

120. Paffons préfentement à de nouvelles recherches fur l'attraction des folides qui font formés, non par des ellipfes entieres, mais par des portions ou fegmens d'ellipfe.

121. Si on fait tourner un fegment d'ellipfe autour d'une corde quelconque, on pourra toujours déterminer l'attraction que le fphéroïde qui en réfulte exerce à fon fommet, ou, ce qui revient au même, à l'extrêmité de la corde. Car l'équation de l'ellipfe, par rapport à cette corde, eft en général $yy + mxy + nxx + ax + by = 0$, où il n'y a point de terme conftant, parce que (*hyp.*) x & y font nulles à-la-fois. Mettant

donc pour x, r coſ. z, & pour y, r ſin. z, on aura une valeur de r ſans radicaux en ſin. z & coſ. z, & comme l'attraction du ſphéroïde dépend de l'intégration de rdz ſin. z coſ. z, il s'enſuit, &c. Ainſi le théorême énoncé, Tom. VI de nos *Opuſcules*, pag. 245, art. 58, n'eſt qu'un cas particulier de celui-ci.

122. Il faut remarquer, 1°. que dans cette équation la valeur la plus grande de z eſt celle qui répond à $r=0$, & qui eſt fournie par l'équation a coſ. $z +$ b ſin. $z=0$, ou tang. $z=-\frac{a}{b}$. 2°. Que comme la corde qui ſert ici d'axe de rotation, partage l'ellipſe génératrice en deux parties inégales, on pourra imaginer autour de cette corde deux ſolides différens, dont on trouvera facilement l'attraction par la méthode précédente.

123. On trouveroit la même choſe pour un ſphéroïde formé par une courbe dont l'équation ſeroit $y^m + my^{m-1}x \ldots + nx^m + ay^{m-1} \ldots + bx^{m-1} = 0$; ce qu'il eſt très-facile de voir.

124. On trouveroit encore la même choſe, ſi dans cette derniere équation, on avoit, au lieu de y ou de x, le radical $\sqrt{(\gamma x^2 + \delta y^2)}$. Il faut ſeulement remarquer, que, comme l'intégration dépend de celle de rdz ſin. z coſ. z, & que dz ſin. z coſ. $z = xdx$, en ſuppoſant ſin. $z = x$, la valeur de r doit être telle qu'elle ne contienne que des puiſſances paires de coſ. z, afin qu'il n'y ait point dans la transformée d'autre radical que

celui qui viendra de $\sqrt{(\gamma x^2 + \delta y^2)}$, & qui sera $\sqrt{(\gamma \text{ cos. } z^2 + \delta \text{ sin. } z^2)} = \sqrt{(A + Bxx)}$. Ainsi l'équation en y & en x doit être telle, qu'en substituant r cos. z pour x, & r sin. z pour y, on n'ait dans la valeur de r, que des puissances paires de cos. z.

125. On peut encore considérer que l'attraction d'un cercle dont x est le rayon, sur un point placé à la distance ρ au-dessus de son centre, est $1 - \frac{\rho}{\sqrt{(\rho\rho + xx)}}$, Tom. VI, *Opusc.* pag. 85. Ainsi nommant y les ordonnées de la courbe génératrice du sphéroïde, & ρ les abscisses, on aura pour l'élément de l'attraction $d\rho - \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho\rho + yy)}}$; faisant $y = \rho z$, cette quantité se changera en $d\rho - \frac{d\rho}{\sqrt{(1 + zz)}}$; d'où l'on peut tirer l'équation, ou plutôt les conditions entre ρ & z, pour que l'attraction soit réductible à des arcs de sections coniques.

126. Il ne seroit pas plus difficile de trouver par la même méthode la solidité de ce sphéroïde laquelle est $= \int r^3 dz \text{ sin. } z$, ou $\int yy\, d\rho = \int zz \rho^2 d\rho$. Je remarquerai à cette occasion que la méthode donnée par M. Varignon (Mém. Acad. 1693), pour trouver la solidité du sphéroïde que forme une ellipse en tournant autour d'un de ses diametres obliques, n'est pas exacte, ce Géomètre n'ayant pas fait attention dans sa solution à l'angle oblique des deux diametres; le solide dont il

s'agit eſt, comme on le peut voir aiſément, les deux tiers du ſolide formé par le parallélogramme circonſcrit, ainſi que la ſphere & le ſphéroide ſont les $\frac{2}{3}$ du cylindre, ou plutôt de l'eſpece de cylindre circonſcrit. Or, ſoient a, b les deux demi-axes de l'ellipſe, a', b' les deux demi-diametres conjugués, $2n$ le rapport de la circonférence au rayon; m le ſinus de l'angle des deux diametres, on ſait que $ab = a'b'm$, & $aa + bb = a'a' + b'b'$; de plus, les ſolides formés par les parallélogrammes circonſcrits ſont entr'eux comme abb à $a'b'b'mm$, c'eſt-à-dire, comme b à $b'm$; donc les ſphéroïdes ſont entr'eux comme b à $b'm$. Or l'équation $a' = \frac{ab}{b'm}$ donne b à $b'm$, comme a' eſt à a; donc les ſphéroïdes ſont auſſi en raiſon de a' à a; c'eſt-à-dire, que les ſphéroïdes formés par une ellipſe autour d'un de ſes diametres a', ſont en raiſon inverſe de ce diametre a', & en raiſon directe du diametre conjugué $b' \times m$, m étant le ſinus des deux diametres. Donc auſſi les ſphéroïdes autour de deux diametres conjugués, ſont en raiſon inverſe de ces diametres.

127. Si dans l'équation de l'art. 121 ci-deſſus, $yy + mxy + nxx + ax + by = 0$, on ajoute une conſtante c, alors le point attiré ſera placé dans l'axe du ſphéroïde, ſoit au-dedans, ſoit au-dehors, & en ſubſtituant pour x, r coſ. z, & pour y, r ſin. z, on aura $rr(\text{ſin.}\, z^2 + m\, \text{ſin.}\, z\, \text{coſ.}\, z + n\, \text{coſ.}\, z^2) + r(a\, \text{coſ.}\, z + b\, \text{ſin.}\, z) + c = 0$; d'où $r =$

$$\frac{-a\,\text{cos}.\,z - b\,\text{sin}.\,z}{2(\text{sin}.\,z^2 + m\,\text{sin}.\,z\,\text{cos}.\,z + n\,\text{cos}.\,z^2)} \pm \frac{\sqrt{[-4c(\text{sin}.\,z^2 + m\,\text{sin}.\,z\,\text{cos}.\,z + n\,\text{cos}.\,z^2) + (b\,\text{sin}.\,z + a\,\text{cos}.\,z)^2]}}{2(\text{sin}.\,z^2 + m\,\text{sin}.\,z\,\text{cos}.\,z + n\,\text{cos}.\,z^2)}.$$

Ainſi pour trouver en ce cas l'attraction du ſphéroïde, la difficulté ſe réduit à intégrer le radical précédent, multiplié par dz ſin. z coſ. z; car la quantité non radicale qui entre dans la valeur de r, s'intégre d'ailleurs aiſément en faiſant ſin. $z = u$, & en faiſant diſparoître le radical $\sqrt{(1 - uu)}$.

128. Or qu'on multiplie le haut de la fraction radicale $\frac{dz\,\text{sin}.\,z\,\text{cos}.\,z\sqrt{(A\,\text{sin}.\,z^2 + B\,\text{sin}.\,z\,\text{cos}.\,z + C\,\text{cos}.\,z^2)}}{2(\text{sin}.\,z^2 + m\,\text{cos}.\,z\,\text{sin}.\,z + n\,\text{cos}.\,z^2)}$, par $\frac{\text{cos}.\,z}{\text{cos}.\,z}$, & le bas par $\frac{\text{cos}.\,z^2}{\text{cos}.\,z^2}$, & qu'on mette enſuite la tangente t pour $\frac{\text{sin}.\,z}{\text{cos}.\,z}$, on aura la transformée $\frac{dt}{1+tt} \times \frac{t}{\sqrt{(1+tt)}} \times \frac{1}{1+tt} \times \sqrt{(At^2 + Bt + C)} \times \frac{1+tt}{2(t^2 + mt + n)}$, laquelle contenant un double radical, ne peut même être intégrée par des arcs de ſections coniques.

129. En effet, cette quantité ſe change en

$$\frac{A\,dz\,\text{sin}.\,2z\sqrt{(B + C\,\text{sin}.\,2z + D\,\text{cos}.\,2z)}}{F + G\,\text{sin}.\,2z + M\,\text{cos}.\,2z} = \frac{H\,du\,\text{sin}.\,u\sqrt{(B + C\,\text{sin}.\,u + D\,\text{cos}.\,u)}}{F + G\,\text{sin}.\,u + M\,\text{cos}.\,u} = \frac{H\,du\,\text{sin}.\,u\sqrt{[B + L(\text{sin}.\,u + a)]}}{F + N\,\text{sin}.\,(u+b)} = \frac{H\,dz\,\text{sin}.\,(z-a)\sqrt{(B + L\,\text{sin}.\,z)}}{F + N\,\text{sin}.\,(z+c)} =$$

$= Hd(\text{fin. } z)\,\text{fin. }(z-a) \times \frac{\sqrt{(B+L\,\text{fin. } z)}}{[F+N\,\text{fin. }(z+c)]\,\text{cof. } z}$. Soit $\sqrt{(B+L\,\text{fin. } z)} = Ay+R$, A & R étant deux conſtantes indéterminées, on aura $B+L\,\text{fin. } z = A^2y^2 + 2ARy+R^2$, $\text{fin. } z = \frac{A^2y^2+2ARy+R^2-B}{L}$, $\text{cof. } z = \frac{\sqrt{[L^2-(A^2y^2+2ARy+R^2-B)^2]}}{L}$. Faiſant, pour plus de ſimplicité, $R=0$, & $A=1$; on aura la transformée de cette forme $\frac{Sydy \times [Myy+N+P\sqrt{(1+Fyy+Gy^4)}]}{\sqrt{(1+Fyy+Gy^4)}} \times \frac{y}{F+Oyy+R+B\sqrt{(1+Fyy+Gy^4)}}$; multipliant haut & bas par $F+Oyy-B\sqrt{(1+Fyy+Gy^4)}$, le terme le plus compliqué ſera de cette forme $\frac{Hy^{2r}dy}{(L+Ky^2+My^4)\sqrt{(1+Fyy+Gy^4)}}$, quantité qui ne ſauroit s'intégrer par des arcs de ſections coniques.

130. On peut demander, à cauſe de l'équivoque du ſigne radical, qui exprime la valeur du rayon r, de quel ſigne on doit ſe ſervir pour exprimer cette valeur, au moins dans le cas où le point attiré eſt au-dedans du ſphéroïde; car lorſqu'il eſt au-dehors, alors au lieu de la valeur de r, il faut, comme l'a remarqué M. de la Grange, employer la différence des deux valeurs; ce qui réduit l'expreſſion au ſeul ſigne radical.

131. Pour lever cette difficulté, on remarquera ſimplement que dans l'ellipſe génératrice du ſphéroïde, r a deux valeurs, l'une poſitive, l'autre négative, &

que la poſitive exiſte dans le ſegment générateur, & la négative, dans le ſegment qui eſt le complément de celui-ci à l'ellipſe entiere; & comme ce dernier ſegment n'exiſte point dans le ſolide dont il s'agit, il eſt clair qu'il faut toujours prendre la valeur poſitive de r, c'eſt-à-dire, celle qui a le ſigne $+$ devant le ſigne radical; car lorſqu'une équation du ſecond degré a une valeur poſitive & une valeur négative, c'eſt évidemment le ſigne $+$ devant le ſigne radical qui déſigne la premiere de ces deux valeurs, & le ſigne $-$ la ſeconde.

132. Si on a une courbe dont l'équation ſoit $r = Z + \surd\zeta$, Z & ζ étant des fonctions rationnelles de ſin. z & coſ. z, & que ζ ſoit telle qu'elle ne change point en faiſant coſin. z négatif, & ſin. z poſitif, alors il eſt viſible que dans la différentielle de l'attraction rdz ſin. z coſ. z, ſi on prend deux arcs correſpondans z, & $180 - z$, que j'appelle z', la difficulté ſe réduira à intégrer $dz(Z' - Z)$ coſ. z ſin. z, & que par conſéquent on pourra trouver par les logarithmes, ou par les arcs de cercle, l'attraction du ſphéroïde formé par cette courbe. On voit même que les quantités Z' & Z pourroient encore, ſi on le vouloit, contenir un radical de cette forme $\surd(A + B$ coſ. $z^2)$ ſans que l'intégration devînt plus difficile.

133. On peut remarquer auſſi que ſi Z eſt tel qu'il devienne négatif en faiſant ſin. z & coſ. z négatifs, c'eſt-à-dire en prenant $180 + z$ au lieu de z, & qu'en même-temps ζ ne change point de valeur, alors les

deux courbes semblables que donnera la coupe du sphéroïde par l'axe, appartiendront à la même équation. Car puisque $r = Z + \sqrt{\zeta}$, il est clair que dans la courbe génératrice, qu'on suppose rentrante, étant prise dans sa totalité, r a deux valeurs $Z \pm \sqrt{\zeta}$, l'une positive, l'autre négative, & que si on fait $z' = 180 + z$, ces valeurs deviendront $Z' \pm \sqrt{\zeta'}$, ou $Z' \pm \sqrt{\zeta}$, puisque ζ ne change point de valeur (*hyp.*). Donc la valeur négative $Z - \sqrt{\zeta}$ correspondante à Z, & la valeur positive $\sqrt{\zeta} + Z'$ correspondante à $180 + Z$ seront absolument les mêmes avec des signes différens. Donc, &c.

134. Quoique je n'aye pu jusqu'à présent intégrer la différentielle de l'attraction d'un sphéroïde elliptique autrement que par des arcs de sections coniques, cependant j'invite les Géomètres à cette recherche, dont le succès ne me paroît pas désespéré. J'imagine, par exemple, qu'on pourroit employer une méthode analogue à celle des art. 67 & suiv. du §. III du Mém. précédent; en joignant ensemble deux différentielles dont la somme fût réductible à des arcs de sections coniques, quoique chacune en particulier ne le fût pas. Par exemple, il résulte des recherches ci-dessus, que la différentielle de l'attraction est de cette forme $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}} \log. \left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)$, où, à cause de $\sigma = \frac{1}{\sqrt{x}}$, on peut mettre $\log. \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. Or si on suppo-

soit $\frac{\sqrt{u'}+1}{\sqrt{u'}-1} = A\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$, & qu'en même-temps $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(A+Bu+Cuu)}} + \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}}$ fût intégrable; on feroit disparoître de la somme des deux différentielles la quantité logarithmique log. $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$, parce que log. $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$ + log. $A\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$ = log. A. Il en feroit de même si $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(A+Bu+Cuu)}} + \frac{Ddx}{\sqrt{(A+Bx+Cxx)}}$ étoit intégrable, & que $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ fût égale à $\left(\frac{\sqrt{u}+1}{\sqrt{u}-1}\right)^{\frac{1}{D}}$. J'invite les Mathématiciens à suivre cette idée, & à en tirer meilleur parti, s'il est possible. Je prévois néanmoins que cette recherche pourra renfermer d'assez grandes difficultés, sur-tout dans les cas où la quantité $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ devient de réelle imaginaire, c'est-à-dire, où log. $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$ représente successivement des logarithmes & des arcs de cercle.

135. Si un sphéroïde n'est pas de révolution, & que le rayon r, près du pole, soit exprimé par une fonction de l'angle z, & de l'angle q, que font les méridiens avec un méridien fixe, on aura pour l'attraction au pole ou à l'extrêmité de l'axe $r\,dz\,dq$ sin. z cos. z, ou $dq\,dz$ sin. z cos. $z\,\varphi$.(cos. z; cos. q); d'où il est aisé

de voir que si la fonction donnée est une fonction rationnelle & sans diviseur, la difficulté de la premiere intégration se réduira à l'intégration des fractions rationnelles, quand même la fonction contiendroit sin. z, ou sin. q. Ainsi on pourra d'abord intégrer ou par rapport à z, ou par rapport à q, en regardant l'autre angle comme constant, & plus naturellement l'angle q. Mais dans la seconde intégration par rapport à q ou par rapport à z, on trouvera de nouvelles difficultés, semblables à celles qui nous ont arrêtés jusqu'ici dans la recherche de l'attraction des sphéroïdes elliptiques, ou même plus grandes encore. Cependant la fonction pourroit être telle que le tout s'intégreroit par logarithmes réels ou imaginaires. Par exemple, si on avoit φ (cos. z, cos. q) $=$ Ψ cos. $z \times \Delta$ cos. q, Ψ & Δ étant des fonctions rationnelles, dans lesquelles mêmes on pourroit supposer qu'il y eût des sin. z & des sin. q, il est visible que l'intégration se réduiroit à celle de $QZdqdz$, ou $\int Qdq \times \int Zdz$, Q & Z étant des fonctions rationnelles ; & ainsi du reste.

136. Au lieu d'exprimer les rayons r en entier, par des fonctions de l'angle z, on pourroit prendre simplement l'excès α du rayon r, sur le rayon correspondant d'une sphere, & on auroit pour l'attraction dans le sens de l'axe αdp sin. p cos. pdq, & pour l'attraction perpendiculaire à celle-là, αdp sin. $p^2 dq$ cos. q.

137. On peut remarquer en passant que, si on prenoit cette derniere attraction dans le sens de chaque

méridien ; en faisant abstraction du facteur cos. q & de a, on auroit dp fin. $p^2 dq$, laquelle attraction doit être évidemment $= 0$, puisque les deux parties du méridien de chaque côté de l'axe sont égales & semblables. Cependant si on intégroit à l'ordinaire cette quantité, en faisant pour l'intégrale totale $p = 180$, & $q = 360$, ou $q = 180$, & $p = 360$, elle ne seroit pas $= 0$, comme il est aisé de le voir; ce qui prouve combien il est nécessaire d'avoir égard au facteur cos. q; & de décomposer, par rapport à un plan fixe, l'attraction dont il s'agit.

138. Comme les différentielles des pag. 181 & 184 du Tom. VI de nos *Opuscules*, donnent également l'attraction du sphéroïde, & que celle de la pag. 181 peut même avoir deux formes différentes, selon que les sections elliptiques sont perpendiculaires au plan de c & de b, ou à celui de c & de a; qu'enfin quelques-unes de ces différentielles (principalement dans certains cas) sont bien plus aisément intégrables que les autres; il ne sera pas inutile de montrer ici comment on peut les transformer l'une dans l'autre.

139. Pour cela, soit comme dans le Tom. VI, *Opusc.* pag. 183, $AO = 2c$; $AS = r$, (Fig. 13) un rayon quelconque de l'ellipsoïde, partant du point A, AkO l'ellipse dont le demi-axe CK, conjugué à c, est $= b$, ArO l'ellipse dont le demi-axe conjugué CR à c, est $= a$, & dont le plan est perpendiculaire à AkO; soit aussi l'angle $ASG = y$, l'angle SGt ou $SGr = u$ (en

imaginant un plan Gkr parallèle à l'ellipse dont les axes sont $2a$ & $2b$); soient menées ensuite les lignes si & st perpendiculaires à Gk & à Gr, & joignant Ai, At, soient nommés l'angle SAi, z, l'angle iAG, k, l'angle SAt, t, & l'angle tAG, s, nous aurons pour l'attraction du point s suivant AS, les trois différentes expressions $dudy$ sin. $y \times r$, $dkdz$ cos. $z \times r$, $dsdt$ cos. $t \times r$; & nous allons montrer comment ces différentes expressions peuvent se changer l'une dans l'autre.

140. Nous remarquerons d'abord que $AG = r$ cos. y, & que de plus $Ai = r$ cos. z, & $AG = Ai$ cos. k, d'où $AG = r$ cos. z cos. k, & cos. $y =$ cos. z cos. k; on aura de même AG ou cos. $y \times r = At \times$ cos. $s = r$ cos. t cos. s, d'où cos. $y =$ cos. z cos. $k =$ cos. t cos. s. De plus, $GS = r$ sin. y, $is = GS$ cos. $u = r$ sin. y cos. u; & comme $is = r$ sin. z, on aura sin. y cos. $u =$ sin. z. Enfin, $Gi = Ai$ sin. $k = r$ cos. z sin. k; or $Gi = GS \times$ sin. $u = r$ sin. y sin. u; donc sin. y sin. $u =$ cos. z sin. k. On trouvera de même $Gt = At$ sin. $s = r$ cos. t sin. $s = GS$ cos. $u = r$ sin. y cos. u; d'où sin. y cos. $u =$ cos. t sin. s; & enfin, Gi ou r sin. y sin. $u = ts = r$ sin. t.

141. On a donc toutes ces équations,

1. cos. $y =$ cos. z cos. k,
2. cos. $y =$ cos. t cos. s,
3. sin. y cos. $u =$ sin. z,
4. sin. y sin. $u =$ cos. z sin. k,

5. $\sin. y \sin. u = \sin. t$,

6. $\sin. y \cos. u = \cos. t \sin. s$.

142. On tire de la troisiéme & de la quatriéme équation (en divisant celle-ci par celle-là), $\frac{\sin. u}{\cos. u}$, ou tang. $u = \frac{\cos. z \sin. k}{\sin. z}$; on a de plus $\cos. y = \cos. z \cos. k$; & par ce moyen on transformera l'une dans l'autre les différentielles $du\,dy \sin. y$, & $dk\,dz \cos. z$, de la maniere suivante.

143. Soit $du = Adz + Bdk$, $dy \sin. y$, ou $-d(\cos. y) = Cdz + Ddk$, on trouvera aisément par la méthode que M. de la Grange a donnée dans le Vol. de Berlin, 1773, pag. 126, $du\,dy \sin. y = (AD - BC)\, dz\,dk$; or puisque $\cos. y = \cos. z \cos. k$, on aura $dy \sin. y = dz \sin. z \cos. k + dk \sin. k \cos. z$; donc $C = \sin. z \cos. k$, & $D = \sin. k \cos. z$. De plus, puisque tang. $u = \frac{\cos. z \sin. k}{\sin. z}$, on aura du ou $\frac{d \text{ tang. } u}{1 + \text{tang. } u^2} = \left(\frac{-dz \sin. k + dk \cos. k \sin. z \cos. z}{\sin. z^2}\right) \times \frac{1}{1 + \frac{\cos. z^2 \sin. k^2}{\sin. z^2}} = \frac{-dz \sin. k + dk \cos. k \sin. z \cos. z}{\sin. z^2 + \cos. z^2 \sin. k^2}$; d'où l'on tire $A = -\frac{\sin. k}{\sin. z^2 + \cos. z^2 \sin. k^2}$; & $B = \frac{\cos. k \cos. z \sin. z}{\sin. z^2 + \cos. z^2 \sin. k^2}$; donc $AD - BC = \frac{-\sin. k^2 \cos. z - \sin. z^2 \cos. z \cos. k^2}{\sin. z^2 + \cos. z^2 \sin. k^2}$, qui se réduit à $-\cos. z$, en mettant dans le numérateur $1 - \sin. k^2$

$\sin. k^2$ au lieu de $\cos. k^2$, & $1 - \cos. z^2$ au lieu de $\sin. z^2$. Ainsi la différentielle $du\,dy \sin. y$ se transforme en $dk\,dz \cos. z$.

144. Il est facile de voir qu'on changera $du\,dy \sin. y$ en $ds\,dt \cos. t$ par une méthode semblable ; & on transformeroit de même $dk\,dz \cos. z$ en $ds\,dt \cos. t$, par le moyen des équations $\cos. z \cos. k = \cos. t \cos. s$, $\sin. z = \cos. t \sin. s$; & $\sin. t = \cos. z \sin. k$, tirées des six équations de l'arc. Car ces équations donneront $\sin. z = \cos. t \sin. s$, & $\frac{\cos. z \sin. k}{\cos. z \cos. k}$, ou $\text{tang.}\, k = \frac{\sin. t}{\cos. t \cos. s} = \frac{\text{tang.}\, t}{\cos. s}$; & si on vouloit avoir les équations de t & s en k & en z, on auroit $\sin. t = \cos. z \sin. k$, & $\frac{\sin. s \cos. t}{\cos. t \cos. s}$, ou $\text{tang.}\, s = \frac{\sin. z}{\cos. z \cos. k} = \frac{\text{tang.}\, z}{\cos. k}$.

145. Au lieu de prendre $\cos. y = \cos. z \cos. k$, & $\text{tang.}\, u = \frac{\cos. z \sin. k}{\sin. z}$, on pourroit peut-être imaginer d'autres équations entre u, y, z & k, qui transformeroient la différentielle de la pag. 183 du Tom. VI de nos *Opuscules*, en une différentielle $Q\,dz\,dk$ plus aisément intégrable. C'est un objet de recherche, qui peut être intéressant pour les Géomètres, & que j'abandonne à ceux qui croiront pouvoir tirer parti de cette idée pour trouver l'attraction d'un sphéroïde elliptique.

146. J'avois imaginé d'intégrer d'abord la formule

de la page 183 du Tome VI de nos *Opuscules* en faisant varier u, & ensuite y, & j'avois cru trouver un résultat qui me conduisoit à une formule algébrique d'attraction pour les sphéroïdes elliptiques. Comme cette méthode pourroit en tromper d'autres, il ne sera peut-être pas inutile de la détailler ici.

147. La différentielle de la page 183,

$$\frac{du \cdot \rho\rho\, dy \,\text{fin.}\, y \,\text{cof.}\, y^2}{c\left[1+\left(\frac{ss}{cc}-1\right)\text{cof.}\, y^2\right]},$$ peut être mise sous cette

forme $\frac{c\,du\,dy \,\text{fin.}\, y \,\text{cof.}\, y^2}{\frac{cc}{ss}+1-\frac{cc}{ss}\,\text{cof.}\, y^2}$, ou, en mettant pour $\frac{1}{\rho^2}$

sa valeur $\frac{aa+(bb-aa)\,\text{cof.}\, u^2}{aabb}$,

$$\frac{c\,du\,dy \,\text{fin.}\, y \,\text{cof.}\, y^2 \,.\, a^2 b^2}{[ccaa+(ccbb-ccaa)\,.\,\text{cof.}\, u^2]\,\text{fin.}\, y^2+a^2 b^2},$$ dans laquelle

on peut négliger le coefficient constant $c \,.\, a^2 b^2$.

148. Intégrons maintenant par u, en faisant y constant; & nous aurons d'abord à intégrer

$$\frac{du}{a^2 b^2+[ccaa+(ccbb-ccaa)\,\text{cof.}\, u^2]\,\text{fin.}\, y^2},$$ ou en faisant

$t =$ à la tangente de u,

$$\frac{dt}{1+tt\left[a^2 b^2+\left(ccaa+\frac{(ccbb-ccaa)}{1+tt}\right)\right]\text{fin.}\, y^2} =$$

$$\frac{dt}{a^2 b^2(1+tt)+ccaa(1+tt)\,\text{fin.}\, y^2+(ccbb-ccaa)\,\text{fin.}\, y^2} =$$

$$\frac{dt}{a^2 b^2+c^2 b^2\,\text{fin.}\, y^2+a^2 b^2 tt+ccaatt\,\text{fin.}\, y^2} =$$

$$\frac{dt}{(a^2b^2+c^2b^2 \text{ fin. } y^2)\left(1+\frac{a^2b^2t^2+ccaatt \text{ fin. } y^2}{a^2b^2+c^2b^2 \text{ fin. } y^2}\right)} =$$

$$\frac{1}{a^2b^2+c^2b^2 \text{ fin. } y^2} \times \frac{\surd(a^2b^2+c^2b^2 \text{ fin. } y^2)}{\surd(a^2b^2+c^2a^2 \text{ fin. } y^2)} \times \frac{d\omega}{1+\omega\omega},$$ en faisant $\omega = \frac{t\surd(a^2b^2+c^2a^2 \text{ fin. } y^2)}{\surd(a^2b^2+c^2b^2 \text{ fin. } y^2)}$.

149. Donc l'intégrale eſt

$\frac{1}{\surd(a^2b^2+c^2b^2 \text{ fin. } y^2)\times\surd(a^2b^2+c^2a^2 \text{ fin. } y^2)}$, multiplié par l'angle dont la tangente eſt ω ; or cet angle a pour tangente $\frac{t\surd(a^2b^2+c^2a^2 \text{ fin. } y^2)}{\surd(a^2b^2+c^2b^2 \text{ fin. } y^2)}$; donc lorſque $t=0$, ou ∞, c'eſt-à-dire, lorſque $u=0$, ou 90°, ou 180°, on a également $\omega=0$, ou 90°, ou 180°.

150. Donc, comme on peut également prendre $u=90^\circ$ en quadruplant l'intégrale par y, & en prenant cette intégrale depuis $y=0$ juſqu'à $y=180$, ou prendre $u=180$, & doubler l'intégrale par y, la difficulté ſe réduira à intégrer $90^\circ \times 4 \times$

$\frac{dy \text{ fin. } y \text{ coſ. } y^2}{\surd(a^2b^2+c^2b^2 \text{ fin. } y^2).\surd(a^2b^2+c^2a^2 \text{ fin. } y^2)}$, qui ſe réduit, en faiſant coſ. $y=t'$, à $\frac{t't'dt'\times 90^\circ\times 4}{\surd(A+Bt't'+Ct'^4)}$; c'eſt-à-dire, à des arcs de ſections coniques.

151. Mais cette méthode donne un faux réſultat ; parce qu'on y traite tacitement le coefficient de t en y comme conſtant. On le verra clairement en faiſant

t, non pas $=0$, ni ∞, mais, par exemple, $=1$, ou en général $=a'$. Soit Y le coefficient de t ou de a' dans la valeur de ω; il est aisé de voir que Y doit entrer dans l'intégrale de la quantité dont le numérateur est dy fin. y cos. y^2. Cependant on ne l'y fait pas entrer dans la solution précédente, & c'est en cela que cette solution est fautive. L'erreur tient à ce qu'en faisant $t=0$, ou ∞, le coefficient de t en y, dans la valeur de ω, disparoît, & empêche de voir pour un moment qu'il n'en est pas de même dans les autres valeurs de ω.

152. Nous allons présentement donner quelques théorêmes sur l'attraction des sphéroïdes, qui ne sont pas elliptiques; nous supposerons d'abord, comme dans les Tomes II & III de nos *Recherches sur le Système du Monde*, que ce soient des solides de révolution, & que le rayon r de la courbe ovale génératrice soit exprimé par $1+\alpha\varphi A$, α étant une très-petite quantité, & A l'angle pris depuis l'axe de révolution, & compris entre le rayon vecteur r, & cet axe, le centre des rayons r étant le sommet de cet angle, & placé dans un point de l'axe qui soit à-peu-près le milieu.

153. Observons d'abord que la fonction φA doit être telle, qu'elle ne devienne jamais infinie ni imaginaire, tant que A n'est pas $>180°$. Mais il n'est pas absolument nécessaire que φA demeure la même en supposant A négatif; car le sphéroïde étant formé par la rotation *entiere* d'une courbe, ou plutôt d'une *demi-*

courbe autour de son axe, il peut se faire que les deux parties semblables & égales de cette courbe, placées à droite & à gauche de l'axe, ne soient point unies par la loi de continuité; c'est ce qu'on verra sur-tout évidemment, s'il s'agit de trouver l'attraction à l'extrêmité de l'axe de rotation, puisqu'alors il suffira de chercher l'attraction de la demi-courbe, & de la multiplier par 360°. Et si on cherche dans ce même sphéroïde l'attraction en un point quelconque du méridien, alors si φA change de valeur en faisant A négatif, il faudra seulement avoir égard dans les calculs à cette circonstance, & prendre l'intégrale en ne considérant φA que comme une quantité qui est toujours la même des deux côtés de l'axe de révolution. Ceci s'éclaircira par la suite encore davantage, & sera même rendu encore plus général.

154. Ainsi φA pourroit être supposé tel que non-seulement il changeât de signe en faisant A négatif, mais même qu'il devînt imaginaire; parce qu'on n'a égard ici qu'à la courbe qui s'étend depuis $A = 0$ jusqu'à $A = 180^\circ$, & qui est supposée la courbe génératrice du sphéroïde.

155. On pourroit même supposer sans inconvénient que φA changeât de valeur, ou même devînt imaginaire dans l'étendue des 180 degrés que nous donnons à l'angle A; mais alors, pour avoir φA toujours réelle, il faudroit regarder la courbe génératrice, comme composée de deux portions différentes, qui ne seroient point

unies par la loi de continuité, dans l'étendue même des 180° dont il s'agit; & on auroit égard à cette circonstance dans les calculs; par exemple, si φA contenoit un terme de cette forme, cos. $A^{\frac{1}{2}}$, il faudroit, lorsque A est $> 90°$, mettre cos. $180 - A$ au lieu de cos. A; mais alors, comme nous le verrons plus bas, il seroit bon d'employer une méthode particuliere pour trouver l'attraction du sphéroïde : méthode qui peut même s'étendre au cas où φA ne seroit exprimé par aucune fonction algébrique ni transcendante, mais seroit une quantité irréguliere quelconque, qui n'auroit d'autre propriété que d'être la même pour le même A, & de ne point donner d'angles finis dans la courbe génératrice.

156. Peut-être même ne faudroit-il pas exclure de la fonction φA des quantités telles que f cos. $A^{b\sqrt{-1}}$; f & b étant constans; car cette quantité cos. $A^{b\sqrt{-1}}$ est, comme l'on sait, $= fA' + fB'\sqrt{-1}$, B' & A' étant des quantités réelles; savoir, B' le sinus, & A' le cosinus d'un angle dont le rayon est cos. A, & dont la valeur est b log. cos. A. Or il pourroit peut-être y avoir d'autres termes qui détruisissent celui-là quant à la partie imaginaire.

157. Si φA renferme une fraction, alors il faudra que le dénominateur de cette fraction soit tel que jamais il ne devienne $= 0$; car autrement r deviendroit infini, & nous supposons ici que $\alpha\varphi A$ est une quantité

très-petite. Il ne faut pas même que $\alpha\varphi A$ puisse jamais devenir fort grande, d'où il s'ensuit que le dénominateur de φA, quand il y en a un, ne doit pas être une quantité très-petite.

158. Par conséquent, si le dénominateur de φA est supposé, par exemple, $\alpha + \beta$ cos. $A + \gamma$ cos. $A^2 +$ δ cos. $A^3 + \epsilon$ cos. A^4 &c. comme l'on sait que ce dénominateur peut se diviser en facteurs trinomes & réels de la forme $\alpha' + \beta'$ cos. $A + \gamma'$ cos. A^2, il faut que chacun de ces facteurs ne deviennent jamais ni zero, ni très-petit, tant que cos. A sera réel, c'est-à-dire, tant que cos. A sera entre $+1$ & -1. Donc si on fait $\alpha' + \beta'$ cos. $A + \gamma'$ cos. $A^2 = 0$, il faut que la valeur de cos. A qui en résultera, soit imaginaire ou beaucoup plus grande que l'unité, soit positive, soit négative.

159. Par conséquent, si φA est une fraction, on ne représenteroit pas sa valeur d'une maniere exacte en réduisant cette fraction en série, sur-tout si dans le développement de cette série, il se trouvoit des puissances négatives de cos. A, ou de sin. A, car ces puissances négatives donneroient $\varphi A = \infty$ lorsque cos. A ou sin. A seroient $= 0$, c'est-à-dire, lorsque A seroit $= 90°$, ou 0, ou $180°$; & donneroit alors r infinie, ce qui est contre l'hypothèse faite ici, que r differe peu de l'unité.

160. Il est clair encore, 1°. que, lorsque $A = 0$ & $A = 180°$, $\frac{dr}{dA}$ doit être $= 0$, pour que le sphéroïde

puiſſe être ſuppoſé repréſenter la figure de la terre; autrement la direction de la peſanteur, qui doit toujours être perpendiculaire à la ſurface du ſphéroïde, ſeroit très-différente le long de l'axe & dans les points infiniment proches de l'axe (Voyez Tom. VI, *Opuſc.* pag. 344, art. 19). 2°. On voit auſſi que la courbe génératrice du ſphéroïde doit être une courbe ovale & rentrante, ce qui exclut toute valeur de φA, qui donneroit un point de rebrouſſement en quelqu'endroit de la courbe génératrice. Ainſi ces deux conditions excluent déja une infinité de valeurs de φA, par exemple, celles où φA ſeroit $=$ ſin. A^m lorſque A eſt eſt infiniment petit, m étant < 1.

161. Quelle que ſoit la valeur de φA, algébrique ou tranſcendante, & quelque forme qu'on lui ſuppoſe, (laquelle valeur doit ici être $= 0$ lorſque $A = 0$, puiſque la premiere valeur de r eſt ſuppoſée $= 1$), on peut toujours, comme l'on ſait, exprimer φA d'une maniere très-exacte, en développant cette valeur par les méthodes ordinaires, lorſque A eſt infiniment petit, par une ſuite de puiſſances de ſin. A, ou même de A, qui ne differe point alors de ſin. A, & celle de ces puiſſances, ſin. A^m, dont l'expoſant eſt le moindre, donne, comme l'on ſait encore, la vraie valeur de r, les autres puiſſances devant être négligées; or ſi cette puiſſance eſt telle que m ſoit au-deſſous de l'unité, le ſphéroïde ne peut être en équilibre, puiſqu'il eſt clair que $\frac{dr}{dA}$ ne

ſeroit

feroit pas $=0$, lorsque $A=0$, mais infini. Donc φA ne sauroit être tel, qu'en le développant en série, le premier terme sin. A^m ait un exposant fractionnaire >1. A plus forte raison, m ne peut-il être négatif; ce qui d'ailleurs, en faisant $A=0$, donneroit $\varphi A=\infty$, & non pas $=0$, comme il le doit être alors.

162. Par la même raison, si on fait $A=180°$, il faudra que la valeur de $\frac{dr}{dz}$ soit $=0$ pour cette valeur de A. Et en général toutes les valeurs de φA qui ne donneront pas $d\varphi A=0$ lorsque A sera $=0$, ou $180°$, devront être rejettées.

163. Pour qu'il n'y ait pas, dans la courbe génératrice, de point d'inflexion, il faut que les ouvertures des angles des petits côtés de la courbe soient toutes tournées vers le centre des rayons r, qu'on suppose placé au-dedans de la courbe; donc les perpendiculaires à la courbe doivent être convergentes au-dedans de la courbe; d'où il est aisé de voir que la somme des deux angles $\frac{dr}{rdA}+dA$ doit être plus grande que l'angle suivant $\frac{dr+ddr}{rdA+drdA}$; & que par conséquent $\frac{dr+ddr}{rdA+drdA}-\frac{dr}{rdA}$ doit être $<dA$; donc $\frac{ddr}{rdA}-\frac{dr^2}{r^2dA}$ doit être $<dA$. Or c'est en effet ce qui a lieu (α étant supposé très-petit) tant que $d(\varphi A)$ & $dd\varphi A$ n'est pas $=\infty$. Donc φA doit être tel, que $d\varphi A$

& $dd\varphi A$ ne soit nulle part $=\infty$, quelque valeur qu'on donne à A, depuis 0 jusqu'à 180 degrés; la chose est assez claire par elle-même pour $d\varphi A$, puisque si $d\varphi A$ étoit quelque part infinie, $\frac{dr}{dz}$ seroit infini, ce qui ne se peut, la courbe étant supposée ovale, rentrante, & peu différente du cercle; mais on voit de plus ici que $dd\varphi A$ doit aussi avoir la même propriété.

164. Par exemple, si la valeur de φA, en supposant A infiniment petit (ou $=180^\circ$ à un infiniment petit près), est sin. A^m, ou A^m, m étant <2, il est clair que ddr ou $dd\varphi A$ sera $=\infty$ lorsque $A=0$, ou 180°, & qu'ainsi φA ne peut avoir une telle valeur. C'est ce que nous prouverons aussi plus bas d'une autre maniere.

165. La courbe génératrice du sphéroïde devant être concave dans toute son étendue, on peut supposer l'origine des r placée de telle sorte, que, lorsque $A=90^\circ$, on ait $dr=0$; il suffira pour cela que cos. A se trouve par-tout à une puissance positive dans la différentielle de φA.

166. Or si dans cette hypothèse la valeur de φA est telle, qu'en faisant $A'=180^\circ-A$ la valeur de $\varphi(180^\circ-A)$ soit constamment plus grande ou plus petite que φA, il est aisé de voir que le point qui répond à $A=90^\circ$, sera tiré parallélement à l'axe avec plus de force d'un côté de l'équateur que de l'autre, (j'appelle ici *équateur* le plan passant par le centre des r, & perpendiculaire à l'axe); par conséquent l'attrac-

tion en ce point ne sera pas perpendiculaire au sphéroïde, comme elle le doit être à cause de $dr = 0$ (*hyp.*) lorsque $A = 90°$, & l'équilibre seroit impossible.

167. Ainsi, si on avoit, par exemple, $\phi A = E + B$ cos. $A + C$ cos. $A^3 + D$ cos. A^5 &c. B, C, D, &c. étant tous de même signe, (& de plus E étant $= - B - C - D$, afin que $r = 1$ lorsque $A = 0$), il est clair que l'équilibre seroit impossible, parce que les deux angles A' & A, également éloignés de $90°$, donneroient constamment r plus grand d'un côté que de l'autre.

168. Il en seroit de même si faisant partir du centre les abscisses x dans la courbe génératrice, & supposant dans cette même courbe des ordonnées y parallèles à l'axe, les y étoient constamment plus grandes d'un côté que de l'autre; car alors il est clair, en faisant tourner ces y autour de l'axe, que dans chaque position une des y exerceroit parallèlement à l'axe une attraction plus forte à l'équateur, que l'autre y; & qu'ainsi l'attraction à l'équateur ne pourroit être perpendiculaire au sphéroïde, comme elle le doit être pour l'équilibre.

169. En général, si dans cette hypothèse de $\frac{dr}{dA} = 0$ à l'équateur, les deux parties de la courbe génératrice au-dessus & au-dessous du plan de l'équateur, sont égales & semblables, & qu'en supposant toujours $dr = 0$ à l'équateur & aux deux poles, on trace à volonté, soit au-dessus, soit au-dessous du plan de

l'équateur, au lieu de la partie supérieure ou inférieure de la courbe génératrice, une autre courbe qui soit toute au-dehors ou toute au-dedans de la courbe génératrice, il est visible que l'attraction parallèle à l'axe dans le sphéroïde formé par cette nouvelle courbe, ne sera pas nulle à l'équateur, & qu'ainsi il ne pourra y avoir d'équilibre.

170. On voit par-là combien il est de figures, même ovales & peu différentes d'un cercle, qui ne peuvent former un sphéroïde, dont les parties soient en équilibre.

171. Voyons maintenant si nous ne pourrions pas trouver encore de nouvelles conditions pour la valeur de φA, & servons-nous pour cela de la méthode que nous avons employée dans d'autres occasions pour examiner d'autres loix de la nature, par exemple, celle du rapport des sinus de réfraction dans le passage des corps solides sphéroïdes d'un milieu résistant dans un autre; cette méthode consiste à examiner ce qui arrive lorsqu'on considere un état, où la loi qu'on cherche, quelle qu'elle soit, commence à se manifester infiniment peu. L'avantage de cette méthode, qu'on peut employer en bien d'autres cas, consiste, en ce que la série qui exprime la loi qu'on cherche, est alors très-convergente, parce que ses termes sont formés des puissances croissantes d'une quantité infiniment petite, & qu'on peut même alors négliger tous ses termes, excepté le premier, ou du moins tous les termes qui contiendroient des

puiſſances plus élevées, que celles dont on a beſoin pour l'objet qu'on ſe propoſe de prouver.

172. Nous allons donc conſidérer ici l'attraction dans un point infiniment proche du pole, parce qu'au pole l'attraction horiſontale n'a pas lieu, que par conſéquent elle commence à ſe manifeſter infiniment près du pole, & qu'il en eſt de même de la *variation* de l'attraction verticale.

173. Soit P le pole du ſphéroïde (Fig. 15), l'arc ou angle $PQ = \delta$, l'angle $OQR = q$, & l'arc $QR = p$, il n'eſt pas difficile de voir que coſ. PR, ou coſ. $A =$ coſ. p coſ. $\delta -$ ſin. p ſin. δ coſ. q; que l'élément de l'attraction perpendiculaire à CQ ſera $\frac{dp \times dq \text{ ſin.} p^2 \text{ coſ.} q}{2^{\frac{1}{2}} (1 - \text{coſ.} p)^{\frac{3}{2}}} \times \alpha \varphi(A)$; & que cette attraction feroit nulle au point P, où $\delta = 0$.

174. Suppoſons maintenant que δ ſoit infiniment petit, il eſt aiſé de voir que φA, ou φPR deviendra (en négligeant les quantités infiniment petites du ſecond ordre ſin. δ^2) $\varphi(p, q) +$ ſin. $\delta \Psi(p, q)$, & que l'attraction horiſontale au point Q, c'eſt-à-dire, l'attraction perpendiculaire à CQ, ſera proportionnelle à B ſin δ, B étant une conſtante qui dépend de la valeur de $\Psi(q, p)$ après l'intégration totale.

175. Cette attraction eſt à l'attraction verticale ſuivant QC (qu'on peut ſuppoſer conſtante, parce qu'elle l'eſt à très-peu près), comme C ſin. δ eſt à 1, C étant encore une conſtante.

176. Or il faut pour l'équilibre, que le rapport des deux attractions soit $= \frac{\alpha d\varphi A}{dA}$, ou $\frac{\alpha d\varphi \delta}{d\delta}$. Donc si φA est telle, qu'en faisant A infiniment petit, elle se réduise à une quantité de cette forme, E sin. A^m, m étant un nombre fractionnaire quelconque plus grand que l'unité, mais plus petit que 2, (car nous avons déja exclu les cas où m est < 1), il est impossible alors que le rapport des deux attractions soit égal à $\frac{\alpha d\varphi \delta}{d\delta}$, puisque ce rapport seroit $= Em$ sin. δ^{m-1}, & que sin. δ^{m-1} ne peut être supposé $=$ sin. δ, m étant (*hyp.*) un nombre < 2.

177. Et si dans l'article 174 B étoit $= 0$, comme les autres termes négligés dans l'expression de l'attraction horisontale, seroient de la forme H sin. δ^p, p étant $>$ que l'unité, alors, le terme Em sin. δ^{m-1} ne pouvant être détruit par aucun autre, il est clair que l'équilibre seroit encore impossible.

178. Si en faisant $A = 180°$, le rayon est exprimé par $A' + B'$ sin. α^m comme il le doit être en effet, & que le nombre m soit encore plus petit que 2, l'équilibre est encore impossible, par les mêmes raisons.

179. Il en seroit de même si φA étoit telle, qu'en faisant $A = 90°$, ou cos. $A = 0$, & supposant $dr = 0$ lorsque $A = 90°$, la valeur de φA devenoit alors cos. A^m, m étant un nombre plus petit que 2. En effet, quoique la valeur de $\alpha\varphi A$, comptée depuis l'équateur,

ne soit pas simplement $\alpha \varphi A$, mais $\alpha \varphi A \times \Psi \rho$, ρ étant l'angle variable de chaque vertical avec l'équateur, il est néanmoins aisé de voir que, si on prend, à compter de l'équateur, un arc infiniment petit $= \delta$, comme on l'a pris dans l'art. précédent en partant du pole, l'attraction horisontale à l'extrêmité de cet arc, sera proportionnelle, comme dans l'art. précédent, à B' sin. δ, & que le rapport de cette attraction à la pesanteur, sera C' sin. δ, C' & B' étant des constantes. Or le rapport de dr à $d\delta$ en ce point est évidemment celui de $\alpha d(\text{sin.}\,\delta)^m$ à $d\delta$, c'est-à-dire, αm sin. δ^{m-1}. Donc, &c.

180. Ce n'est pas tout; & l'on peut prouver que la valeur de φA, lorsque A est infiniment petit, ne sauroit être sin. A^m, m étant une fraction quelconque. En effet, si en supposant A infiniment petit, la valeur de $\alpha \varphi A$ (qui renferme alors, comme l'on sait, une suite de puissances de A, ou sin. A) renferme dans cette suite un seul terme à exposant fractionnaire δ sin. A^m, m étant une fraction, on peut prouver par la même méthode, que l'équilibre est impossible. Car il y aura nécessairement dans la valeur de $\frac{dr}{dA}$ un terme δ sin. A^{m-1} qui aura un exposant fractionnaire. Or il est aisé de voir, en suivant le procédé ci-dessus, que la valeur de l'attraction horisontale, lorsque δ est infiniment petit, ne peut être composée que d'une suite de termes A sin. $\delta + B$ sin. $\delta^2 + C$ sin. δ^3, &c. où sin. δ n'est

élevé qu'à des puissances entieres, & que l'attraction verticale sera de même $E+F$ sin. $\delta+G$ sin. δ^2, &c. Donc le rapport de ces deux attractions ne renfermera jamais que des puissances entieres de sin. δ. Donc, &c.

181. On verra de même, & par toutes les raisons exposées ci-dessus, que l'équilibre est impossible, si en faisant A infiniment peu différent de 90°, la valeur du rayon est $=1+B'$ cos. A^p+C' cos. A^q, &c. & qu'il y ait un seul des exposans p, q, &c. qui soit fractionnaire.

182. On pourroit objecter ici, que dans l'expression de l'attraction horisontale & verticale, nous n'avons point d'égard à certains termes où il pourroit entrer des puissances fractionnaires de sin. A; par exemple, il est certain (Tom. II & III de nos *Recherches sur le Systême du Monde*) que l'attraction verticale doit renfermer un terme de cette forme, $\frac{4\pi}{3}(1+\alpha\varphi\delta)$; & $\varphi\delta$ pourroit en ce cas contenir des puissances fractionnaires de sin. δ. Mais il faut observer, que dans la comparaison ou le rapport de l'attraction horisontale à la verticale, ces termes renfermeroient le quarré de α ou des puissances plus élevées de α; & on peut supposer α si petit, que son quarré α^2 & les puissances plus élevées soient d'un ordre d'infiniment petit, moindre que α sin. A^m, m étant un nombre entier tel qu'on voudra. Ainsi la démonstration précédente aura toujours lieu dans ce cas; or il est aisé de conclure delà qu'elle

aura

aura lieu même dans les cas où α ne feroit pas auffi petit qu'on vient de le fuppofer. Car fi l'équilibre étoit poffible, en ne fuppofantt pas α auffi petit que nous venons de faire, & en donnant à φA une valeur qui renfermât des puiffances fractionnaires de fin. A ou cof. A, il eft clair que l'équilibre auroit lieu encore en fuppofant α fi petit qu'on voudroit, puifque α difparoît dans la comparaifon du rapport des deux attractions à la quantité $\frac{\alpha d\varphi A}{dA}$; cette quantité α fe trouvant également dans l'un & dans l'autre. Donc, &c.

183. Donc en général φA ne peut être exprimé que par une fuite, qui foit de cette forme A fin. $A^2 +$ B fin. $A^3 + C$ fin. A^4, &c. lorfque $A = 0$, ou 180°, & qui foit de la forme A' cof. $A^2 + B'$ cof. $A^3 +$ C' cof. A^4, &c. lorfque $A = 90^\circ$.

184. On peut confidérer de plus que dans le développement de la quantité φ(cof. p cof. δ — fin. p fin. δ cof. q), pour l'expreffion de l'attraction horifontale, fi on met pour cof. δ fa valeur $1 - \frac{\text{fin. } \delta^2}{2} -$ $\frac{\text{fin. } \delta^4}{8}$, &c. tous les termes où cof. q eft élevé à une puiffance paire, doivent s'en aller, parce que ces termes feront encore multipliés par $\frac{dq \text{ fin. } p^2 \text{ cof. } q}{(1 - \text{cof.} p)^{\frac{1}{2}}}$, & auront par conféquent zero pour intégrale, à caufe de

la puiſſance impaire de coſ. q (Voyez Tome V, *Opuſcules*, page 27, article 54), en ſorte qu'il ne reſtera, dans le développement de la fonction dont il s'agit, que les termes où coſ. q, & par conſéquent ſin. δ coſ. q feront élevées à une puiſſance impaire; or, delà il eſt aiſé de conclure qu'il ne doit y avoir dans le développement de $\varphi\delta$, que des puiſſances paires de ſin. δ, afin que $\frac{d\varphi\delta}{d\delta}$, qui doit exprimer le rapport de l'attraction horiſontale à la verticale, ne renferme que des puiſſances impaires. Donc lorſque A eſt infiniment petit, ou infiniment peu différent de 180°, la valeur de φA doit être B ſin. $A^2 + C$ ſin. $A^4 + D$ ſin. A^6, &c. & par la même raiſon encore, on trouvera que la valeur de φA, lorſque $A = 90°$, à très-peu près, ne doit contenir que des quantités de cette forme, b coſ. $A^2 +$ c coſ. $A^4 + e$ coſ. A^6, &c.

185. On peut reconnoître aiſément les cas où la valeur du rayon renfermera, lorſque $A = 0$, ou 90° à peu-près, des ſin. A^m & coſ. A^p, dans leſquels m & p feront fractionnaires. Car il eſt viſible qu'alors il y auroit quelque différentielle de r, ſavoir celle d'un ordre $> m$, qui feroit infinie, lorſque $A = 0$, ou 180°. Donc ſi, en différentiant ſucceſſivement r, & faiſant dA conſtant, il ſe trouve une différentielle infinie, lorſque $A = 0$, ou 180°, il eſt clair que l'équilibre eſt impoſſible.

186. Il en ſera de même pour coſ. A'; c'eſt-à-dire, que ſi, en faiſant $A = 90°$, on différentie ſucceſſivement r, & qu'il y ait une valeur infinie pour quelqu'une des différentielles $d^m r$ du rayon r, l'équilibre ſera impoſſible.

187. Il faut pourtant remarquer que la valeur de $d^m r$ pourroit encore être infinie, quand même il n'y auroit pas d'expoſans fractionnaires. C'eſt ce qui arrivera, par exemple, en ſuppoſant que φ (ſin. A) renferme, lorſque $A = 0$, ou $180°$, ou $90°$, des puiſſances entieres négatives, de ſin. A, ou coſ. A, mais alors dy même & y, feroient infinis, ce qui ne ſe peut. Ainſi ce cas ne met aucune reſtriction réelle à la démonſtration précédente.

188. Nous avons conſidéré juſqu'à préſent l'équilibre du fluide, indépendamment de la force centrifuge, & en ſuppoſant le ſphéroïde en repos. Si on a préſentement égard à cette force centrifuge, il ſera facile de voir, en revenant ſur les propoſitions précédentes, qu'elles peuvent être encore appliquées à ce cas; & qu'ainſi la fonction φA devra, pour l'équilibre, avoir la forme indiquée dans les articles précédens.

189. Il y aura ſeulement cette différence, que ſi le fluide ne tourne pas autour de ſon axe, & qu'il y ait en ce cas quelque figure propre à l'équilibre, alors (en ſuppoſant α infiniment petit) on pourra donner à α telle valeur infiniment petite qu'on voudra, parce que cette quantité α, comme nous

l'avons vu plus haut (art. 182) diſparoît de l'équation; de ſorte que le ſphéroïde pourra (dans le cas ſuppoſé) avoir une infinité de figures, toutes très-peu différentes d'une ſphere, & toutes propres à l'équilibre, quoique toutes puiſſent être d'ailleurs aſſujetties à la même loi, & ne différer que par la valeur de α. Au lieu que ſi l'on a égard à la force centrifuge, il y aura par la condition de l'équilibre une équation entre f & α. Mais il n'en ſera pas moins vrai qu'on peut ſuppoſer f, & par conſéquent α ſi petits que dans l'équation de l'équilibre, on pourra négliger, comme a fait ci-deſſus, art. 182, les puiſſances de f & de α; d'où l'on conclura, comme dans ce même art. 182, que les théorêmes démontrés, art. 182, pour le cas où $f=0$, & appliqués ici au cas où f & α ſont ſuppoſés exceſſivement petits, auront lieu lors même que f & α ne ſeront plus d'une exceſſive petiteſſe.

190. La conſidération de la rotation du fluide, & par conſéquent de la force centrifuge, donne lieu de plus à quelques remarques particulieres.

191. Nous venons de prouver (art. 184) que lorſque ſin. A eſt très-petit, la puiſſance la moins élevée de φA doit être ſin. A^2, ou ſin. A^4, ou, &c. ſuivant les puiſſances paires. On peut obſerver de plus que, ſi le ſphéroïde tourne ſur ſon axe, le terme ſin. A^2 doit néceſſairement s'y trouver. Car il eſt clair que la force centrifuge produiſant dans la force horiſontale un terme de cette forme, R coſ. A ſin. A, il faut néceſſaire-

ment qu'il se trouve dans l'expression de φA un terme de la forme sin. A^2, ou cos. A^2, sans quoi l'équilibre est impossible.

192. On prouvera de même, & par les mêmes raisons, que le terme cos. A^2 doit nécessairement se trouver dans l'expression de φA, lorsque A est $=90^\circ$.

193. Dans la théorie précédente sur la valeur de φA, on évite, comme il a déja été remarqué plus haut (art. 171), les inconvéniens de la méthode des suites, dont l'usage paroît dangereux, lorsque les suites peuvent devenir divergentes. Ici on suppose δ infiniment petit, de sorte que les suites sont toujours très-convergentes, & peuvent même être supposées aussi convergentes qu'on voudra, en prenant δ aussi petit qu'il sera nécessaire pour cet effet.

194. M. de la Place a remarqué dans les Mém. de l'Acad. de 1772, Tom. II, que si un sphéroïde, très-peu différent d'une sphere, a la figure nécessaire pour être en équilibre, il y sera encore en y ajoutant les termes a cos. $A^2 + b$ cos. $A + c$, c'est une suite évidente de notre théorie générale sur ce même objet, Tom. V de nos *Opuscules*. Car nous avons fait voir, page 24 de ce Tome V, que l'addition du terme b cos. A ne changeoit pas la figure du sphéroïde; il en est de même du terme c, qui ne change rien à l'attraction horisontale; & quant au terme a cos. A^2, il sera évidemment détruit en donnant à la force centrifuge une valeur

cale en faisant seulement varier l'angle δ de la quantité infiniment petite $d\omega$, & en divisant par $d\delta$, on trouvera une quantité égale à la moitié de l'attraction perpendiculaire au plan $OQPC$, comme il est très-facile de le voir. Delà on peut tirer aisément pour les sphéroïdes qui ne sont pas de révolution, de nouveaux théorêmes, analogues à ceux des Mém. de 1772, déja cités. On verra, par exemple, que si le sphéroïde est en équilibre, & que l'angle δ demeure constant pendant que l'angle η varie, l'attraction verticale ou la pesanteur sera la même; & qu'à différentes latitudes, la longitude restant la même ou non, la différence de la pesanteur, à compter de l'équateur ou du pole, sera comme le quarré du sinus, ou du cosinus de latitude.

197. De plus, comme la nature des fonctions φz, & $\varphi(z, \eta)$ n'entre en aucune maniere dans les opérations que nous venons de faire pour la différentiation de l'attraction verticale, il est aisé de voir que ces théorêmes auront lieu quand même φz & $\varphi(z, \eta)$ ne seroient pas des fonctions analytiques, mais des quantités quelconques irrégulieres, qui demeurassent seulement les mêmes, quand z & η demeureroient les mêmes.

198. De ces théorêmes il résulte évidemment que le double de la différence de pesanteur à l'extrêmité de deux rayons quelconques, multipliés par le rayon 1, est égal, soit qu'il y ait équilibre ou non, à la somme des forces tangentielles qui agissent sur l'arc compris entre ces rayons.

199. Or on ſait par la théorie de l'Hydroſtatique, que la ſomme de ces forces eſt égale à la différence de poids des deux rayons, ſoit qu'il y ait équilibre ou non.

200. Donc le double de la différence de peſanteur à l'extrêmité de deux rayons quelconques, multiplié par le rayon 1 (qui eſt le demi-axe), eſt égal, ſoit qu'il y ait équilibre ou non, à la différence de poids total des deux rayons.

201. Dans ces théorêmes, comme nous ſuppoſons que le fluide peut n'être pas en équilibre, & que par conſéquent il peut être en mouvement, nous n'avons d'égard qu'aux forces (verticale ou horiſontale) qui viennent de l'attraction des parties, & nous faiſons abſtraction de celles qui pourroient venir du mouvement de ces mêmes parties.

202. On peut trouver facilement ce que la conſidération de la force centrifuge doit ajouter de modification à ce théorême; ainſi on verra que le double de la différence des poids $- \div f$ ſin. δ^2 eſt égal à la ſomme des forces tangentielles, c'eſt-à-dire, à la différence de poids des deux rayons. Car ſoit qu'il y ait équilibre ou non, ſoit que le fluide tourne ou ne tourne pas autour de ſon axe, la ſomme des forces tangentielles réſultantes de l'attraction & de la force centrifuge, eſt toujours égale, comme l'on ſait, à la différence de poids des rayons, réſultante auſſi de l'attraction & de la force centrifuge.

203. On peut obſerver ici que la méthode de l'article 194 eſt bien moins commode, & ſur-tout moins facile que celle de l'article 173, pour trouver l'attraction du ſphéroïde; mais qu'en même-temps cette méthode de l'art. 194 donne avec une extrême facilité les théorêmes qui viennent d'être démontrés, au lieu que les autres méthodes, & en particulier celle de l'art. 173, ne donneroient ces mêmes théorêmes que par des calculs aſſez compliqués. D'où l'on voit combien il eſt utile d'employer & d'eſſayer dans cette théorie des méthodes différentes, puiſque ces différentes méthodes ont les unes ſur les autres des avantages réciproques, ſelon ce qu'on ſe propoſe de trouver.

204. On peut auſſi démontrer, en employant la méthode de l'art. 194, les théorêmes donnés ci-deſſus (art. 183 & ſuiv.) ſur les valeurs de φA néceſſaires à l'équilibre, lorſque ſin. A ou coſ. A ſont infiniment petits; & le réſultat ſera le même.

205. Cette maniere de démontrer les théorêmes dont il s'agit, auroit même l'avantage de n'exiger aucune opération ſur la quantité ou fonction indéterminée $\varphi(z)$; en ſorte que ces théorêmes ſeront vrais, quelle que ſoit cette fonction. Or on ſait d'ailleurs que ſi cette fonction eſt celle qui convient à un ſphéroïde elliptique homogène, ce ſphéroïde ſera en équilibre, en ayant égard à la force centrifuge, & on peut prouver aiſément que l'attraction horiſontale dans le ſphéroïde dont il s'agit, ſeroit compoſée de termes

B ſin. $A + C$ ſin. $A^3 + D$ ſin. A^5, lorſque ſin. A ſeroit infiniment petit ; d'où réſulte une nouvelle confirmation de nos théorêmes ſur la forme de φA néceſſaire pour maintenir l'équilibre.

206. On peut auſſi démontrer par les mêmes méthodes, que ſi au lieu de φA, on avoit $\varphi(z, n)$, il faudroit, lorſque n eſt très-petit, que φn fût de la forme a ſin. $n^2 + b$ ſin. n^4, &c.

207. La force centrifuge étant ſuppoſée f à la diſtance 1, la partie de cette force perpendiculaire au rayon r ſera exactement fr ſin. A coſ. A, & la partie qui eſt dans la direction du rayon r, ſera fr ſin. A^2 ; de ſorte que ſi on nomme F la force horiſontale, ou perpendiculaire au rayon, & F' la force verticale dirigée ſuivant le rayon, on aura exactement & rigoureuſement la proportion $F - fr$ ſin. A coſ. $A : F' - fr$ ſin. $A^2 :: dr : rdA$; & comme F & F' ne contiennent que α, A avec des conſtantes, il eſt clair qu'on aura une équation, dans laquelle tous les termes où ſin. A ſe trouve élevé à la même puiſſance, ſeront ſéparément égaux à zero, & dans laquelle de plus f ne ſe trouvera qu'au premier degré à tous les termes.

208. Donc en ſuppoſant chacun de ces termes égaux à zero, ce qui donne autant d'équations, dont chacune renferme tous les termes où ſin. A eſt élevé à la même puiſſance, on tirera de ces équations une valeur de f en α, & cette valeur devra être la même pour

chaque équation, dans l'hypothèse que le fluide puisse être en équilibre.

209. On sait déja que cette équation aura lieu rigoureusement dans le sphéroïde elliptique, & que l'équation pour l'équilibre du sphéroïde elliptique, avec force centrifuge, sera (Tom. V, *Opusc.* pag. 37) donnée par la proportion $\frac{1+r\alpha}{1+\alpha} - f : 1 + \Delta\alpha :: 1 : (1+\alpha)^2$; en prenant f pour la force centrifuge à la distance 1, & non pas rigoureusement pour la force centrifuge sous l'équateur, à la distance $1+\alpha$; ou plutôt pour le rapport de cette force centrifuge à l'attraction $\frac{4\pi}{3}$ d'une sphere du rayon 1.

210. Ainsi dans l'équation générale de l'équilibre, où il n'y a d'indéterminées que f & α, on est déja sûr que la valeur de f tirée de l'équation précédente pour l'ellipse, satisferoit à cette équation générale.

211. Or nous avons fait voir que l'équilibre exige pour la valeur de r une quantité de cette forme : $1 + \alpha(A' \text{ fin. } A^2 + B' \text{ fin. } A^4 + C' \text{ fin. } A^6$, &c.) lorsque A est supposé très-petit, & l'on peut même, pour plus de simplicité, supposer $A' = 1$, en sorte que $r = 1 + \alpha(\text{fin. } A^2 + B' \text{ fin. } A^4 + C' \text{ fin. } A^6$, &c.)

212. Donc si les coefficiens B', C', &c. ont la valeur qui détermine le sphéroïde elliptique, l'équation entre f & α aura lieu ; & par conséquent il y aura une

valeur de B', C', &c. qui ſera celle qui convient à ce ſphéroïde.

213. Mais y aura-t-il d'autres valeurs de B', C', &c. qui ſatisfaſſent à l'équilibre, & qui donnent une autre équation entre f & α que celle qui appartient au ſphéroïde elliptique. C'eſt ce qu'il paroît difficile de croire, d'autant que la valeur linéaire de f en α, tirée de chaque terme égalé à zero, doit être la même dans chacune de ces équations, & que ces équations étant en nombre infini, & ne pouvant différer entr'elles que par la valeur des coefficiens B, C, &c., il paroît difficile que pluſieurs valeurs de f en α puiſſent y ſatisfaire. Ceci n'eſt au reſte qu'une ſimple conjecture, qui mériteroit un plus profond examen.

214. Si on fait $r = 1 + (A' + B'k + C'k^2 + D'k^3)$; k étant le coſinus de A, (Tom. III, *Opuſc.* pag. 180 & 181), nous avons fait voir qu'en ſuppoſant un noyau ſphérique de la denſité $\frac{3}{7}$, & abſtraction faite de la force centrifuge, D peut être tout ce qu'on voudra; & qu'ainſi dans cette hypothèſe il y aura équilibre, quelque figure qu'on donne au ſphéroïde, pourvu que cette figure differe peu d'une ſphere.

215. On peut voir aiſément, par la même raiſon, que ſi $r = 1 + (A' \text{ſin.} A^2 + B' \text{ſin.} A^4 + C' \text{ſin.} A^6$, &c.) il y aura un rapport de denſité entre le noyau & le fluide, qui donnera toutes ſortes de figures d'équilibre.

216. Lorſque $B' = 0$, & $C' = 0$, &c., c'eſt-à-dire, lorſque le ſphéroïde eſt à très-peu près elliptique, ſi

le rapport du noyau au fluide, n'eſt pas tel qu'il le faut pour que l'on ait toutes ſortes de figures d'équilibre, on peut y établir l'équilibre par le moyen de la force centrifuge; nous l'avons fait voir ailleurs, (*Recherches ſur le Syſtême du Monde*, Tom. III, page 184 & ſuiv.)

217. Il n'en eſt pas de même pour les autres termes B' ſin. k^4, C' ſin. k^6, &c. ſi la denſité du noyau n'eſt pas telle qu'il le faut pour la condition requiſe à l'équilibre, on ne peut y ſuppléer par la force centrifuge, parce que cette force ne donne pas, au moins dans la premiere approximation, de terme qui puiſſe détruire ceux qui viennent de B' & de C', &c.

218. J'ai fait voir (Tome V, *Opuſc.* pag. 37) que ſi le fluide a un noyau ſphérique au centre, la figure requiſe pour l'équilibre ne ſauroit être rigoureuſement elliptique. Elle le ſera ſeulement à-peu-près, ſi la force centrifuge eſt ſuppoſée très-petite par rapport à la peſanteur.

219. Mais on peut demander ſi dans ce cas il y aura rigoureuſement une figure poſſible d'équilibre? C'eſt ce qu'il ne paroît pas facile de prouver; cependant cette poſſibilité paroît aſſez vraiſemblable; & dans ce cas il y auroit une figure non rigoureuſement, mais à très-peu-près elliptique, & peu différente du cercle, qui donneroit l'équilibre rigoureux.

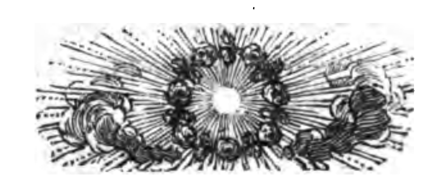
220. Dans cette ſuppoſition, nous avons fait voir que, ſi le rapport des denſités du noyau & du fluide,

eſt $= \frac{3}{5}$, le fluide, ſuppoſé en repos, pourra avoir telle figure qu'on voudra, pourvu qu'elle ſoit à-peu-près elliptique & peu différente du cercle.

221. Il paroîtroit donc que, pour avoir l'équilibre rigoureux, il ſuffiroit de faire à cette figure un changement infiniment petit du ſecond ordre, c'eſt-à-dire, de l'ordre α^2, comme nous l'avons déja obſervé, Tom. VI, *Opuſc.* pag. 223.

222. Néanmoins, comme cette ſuppoſition même d'un changement de l'ordre de α^2 pourroit encore ne pas ſuffire à l'équilibre, il ſeroit alors néceſſaire de donner à la force centrifuge f une petite valeur, c'eſt-à-dire, de faire tourner tant ſoit peu le fluide.

223. Mais il y auroit toujours cette différence entre le cas où le rapport des denſités eſt $\frac{3}{5}$, & ceux où il ne l'eſt pas, que dans le premier cas, la force centrifuge ne devra être que de l'ordre de α^2, au lieu que dans les autres cas, elle ſera de l'ordre de α.



REMARQUES
SUR LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

En relisant ce Mémoire, long-temps après qu'il a été fait, j'ai trouvé encore les Remarques suivantes à y ajouter. J'ai cru qu'elles pourroient être utiles dans la recherche de l'attraction des sphéroïdes.

Remarque sur l'article 133.

1. On peut observer ici que dans la belle méthode donnée par M. de la Grange, pour trouver l'attraction des sphéroïdes, il détermine l'attraction d'un point pris au-dedans du corps par la *somme* des rayons partans de ce point, mais que cette somme en est proprement la *différence*, & le doit être, parce que les rayons sont disposés en sens contraire, & exercent sur ce point des attractions opposées.

2. On peut remarquer aussi que les deux valeurs de r en p & en q, qu'on trouve dans ce cas-là, savoir, $r = k \pm \sqrt{s}$, (k étant ainsi que s une fonction de sin. & cos. de p & de q) sont telles qu'en faisant p négatif, la valeur positive se change en négative, & la néga-tive

tive en poſitive, lorſque le point attiré eſt au-dedans du corps; ce qui doit en effet avoir lieu dans les ſphéroïdes elliptiques, où la ligne tirée par le point attiré, coupe toujours le ſphéroïde en deux points ſeulement, & en deux points oppoſés. Dans ce cas, la quantité k devient de ſigne contraire, en faiſant ſin. p & coſ. p négatifs, & s reſte la même, comme nous avons vu dans l'art. 132, pour z dans la quantité $Z \pm \sqrt{\zeta}$.

3. Mais on auroit tort de croire que, quand r n'a que deux valeurs, c'eſt une marque que le rayon ne coupe la ſurface ou la courbe, qu'en deux points. Car ſoit, par exemple, $r = a$ coſ. $p^2 \pm b$ ſin. p, il eſt clair qu'en ſuppoſant p fort petit & $= \alpha$, les deux valeurs de r ſont poſitives, c'eſt-à-dire, toutes deux du même côté; ſuppoſons maintenant $p = 180 + \alpha$, les deux valeurs de r ſeront auſſi poſitives & égales aux deux précédentes, mais placées en ſens contraires, en ſorte que le rayon r coupera la courbe en quatre points, deux de chaque côté du point attiré. On voit aiſément que dans ce cas il ne faudroit pas prendre en général la ſomme des deux valeurs de r, ni même leur différence, pour avoir l'attraction du ſphéroïde, parce que ce ſphéroïde a pour ainſi dire deux ſurfaces différentes, & qu'il eſt comme compoſé de deux ſolides. Il faudra varier le calcul ſuivant les cas.

Sur l'article 136.

1. Si la courbe AO génératrice du ſphéroïde n'étoit pas très-peu différente du cercle AB, (Fig. 16) & qu'en nommant CA ou CB, 1, l'angle $BCA = z$, $CO = 1 + \varphi z$, x les parties de la ligne BO, à commencer du point B, on voulût avoir l'attraction de BO, (ou plutôt du petit ſolide formé par BO) ſur le point A, on auroit cette attraction ſuivant $AC = dx \times (1 - x)$

$$dz (1 - x) \text{ſin.}\, z \times \frac{1 - (1 - x)\, \text{coſ.}\, z}{\sqrt{[(1 - (1 - x)\, \text{coſ.}\, z)^2 + (1 - x)^2\, \text{ſin.}\, z^2]^3}}$$

$$= \frac{dx (1 - x)^2\, dz\, \text{ſin.}\, z\, (1 - \text{coſ.}\, z + x\, \text{coſ.}\, z)}{[1 - 2(1 - x)\, \text{coſ.}\, z + (1 - x)^2]^{\frac{3}{2}}},$$ quantité qu'il faudra multiplier encore par le rapport 2π de la circonférence au rayon. Si on intégre cette équation en ne regardant que x comme variable, on verra aiſément que l'intégration dépendra des logarithmes, puiſqu'en faiſant $1 - x = y$, la différentielle deviendra égale à $\frac{-2\pi dy . y^2 dz\, \text{ſin.}\, z\, (1 - y\, \text{coſ.}\, z)}{(1 - 2y\, \text{coſ.}\, z + y^2)^{\frac{3}{2}}}$; quantité qui s'intégre par logarithmes, en regardant z comme conſtant. Delà il eſt aiſé de conclure que, quelle que ſoit la fonction φz, la différentielle à intégrer ſera de la forme ſuivante $Z dz \times Z''$, Z'' étant une fonction de z, en partie algébrique, en partie logarithmique.

2. On peut, ſans beaucoup de peine, appliquer

cette méthode au cas où le point A, dont on cherche l'attraction, n'est pas le sommet du sphéroïde, mais tout autre point; mais dans tous les cas, le résultat de la triple intégration seroit si compliqué, que nous abandonnons cette recherche à ceux qui voudront la pousser plus loin.

Sur l'article 173.

1. Au lieu de $\varphi(\text{cos. } p \text{ cos. } \delta - \text{sin. } p \text{ sin. } \delta \text{ cos. } q)$, on peut écrire $\varphi[\text{cos. } \delta + (\text{cos. } p - 1) \text{ cos. } \delta - \text{sin. } p$ $\text{sin. } \delta \text{ cos. } q)$, & pour avoir l'attraction horisontale & l'équation du sphéroïde qui en résulte, on emploiera une méthode analogue à celles que nous avons données ailleurs pour de semblables questions (*a*), en développant en série la fonction précédente, & en faisant attention, 1°. qu'il faut négliger les termes où cos. q se trouve avec une dimension paire, parce que ces termes se trouveront multipliés encore par cos. q & seront par conséquent nuls dans l'intégration; 2°. que les puissances impaires de cos. q (les seules qu'il faille conserver ici) étant toujours accompagnées des puissances impaires de sin. p, & ces quantités se trouvant encore multipliées par $\text{sin. } p^2$ dans le facteur $\frac{dp\, dq \text{ sin. } p^2 \text{ cos. } q}{(1 - \text{cos. } p)^{\frac{1}{2}}}$, sin. p y sera à une puissance impaire; & comme dp sin. p est la différence de $1 - \text{cos. } p$,

(*a*) Voyez Tom. V, *Opusc.* pag. 114.

il sera aisé d'appliquer ici les formules données dans le Tom. V de nos *Opuscules*, pag. 28, art. 55 & suiv. 3°. Nous avons donné encore ailleurs (*a*) une méthode très-simple d'avoir l'intégrale de dq cos. q^{2m} lorsque $q = 180$, ou 360°. 4°. Enfin, comme sin. δ accompagne toujours cos. q, & que cos. q ne doit se trouver dans la fonction développée qu'avec une dimension impaire, il est clair que sin. δ se trouvera par-tout avec une dimension impaire; & comme le second membre de l'équation qui donne l'équilibre, est $\frac{d\varphi \text{ cos. } \delta}{d\delta} = \frac{-\text{sin. } \delta dz}{dy}$ (en nommant φ cos. θ, z, & cos. δ, y) par conséquent sin. δ disparoîtra de tous les termes, & il ne restera que des puissances paires de sin. δ. Nous remarquerons encore que pour avoir l'intégrale totale qui exprime l'attraction du sphéroïde, il faut faire, ou $p = 180°$ & $q = 360°$, ou $p = 360$ & $q = 180°$. Le résultat sera le même dans les deux cas.

2. On parviendra aisément par ce moyen à une équation qui aura un nombre infini de termes, & qui répondra à celle que M. de la Place a trouvée de son côté dans les Mém. de 1773. Mais il nous semble que cette équation aura toujours, par la nature de la solution, deux désavantages. Le premier, d'être fondée sur le développement d'une fonction en série, développement qui peut donner un très-faux résultat, comme

(*a*) *Recherc. sur le Syst. du Monde*, Tom. II, pag. 225 & suiv.

nous l'avons souvent remarqué dans d'autres problêmes. En effet, qu'on suppose ici, par exemple, $\varphi\,(\text{cos.}\,\delta + \rho)$ à la place de la fonction cherchée, & qu'on fasse cette fonction égale à une puissance fractionnaire $\frac{m}{n}$, on verra (Tom. V, *Opusc.* pag. 171 & suiv.) que, si cos. PR, ou cos. $\delta + \rho$ est tel que ρ ne soit pas très-petit par rapport à cos. δ, la série pourra être divergente, & par conséquent fausse, ainsi que l'équation qui en résulte.

3. Un second désavantage de cette équation qui donne la nature du sphéroïde supposé en équilibre, est d'avoir une infinité de termes, qui la rendent très-difficile à intégrer. Mais voilà jusqu'où l'analyse a pu aller jusqu'ici dans cette solution.

4. Soit fait $p = 2u$, on aura $1 - \text{cos.}\,p = 1 - \text{cos.}\,2u = 2\,\text{sin.}\,u^2$, & cosin. $p = 1 - 2\,\text{sin.}\,u^2$, sin. $p = \text{sin.}\,2u = 2\,\text{sin.}\,u\,\text{cos.}\,u$; ainsi la différentielle $\frac{dp\,dq\,\text{sin.}\,p^2\,\text{cos.}\,q}{(1-\text{cos.}\,p)^{\frac{1}{2}}}$, deviendra de la forme $du\,dq\,\text{cos.}\,q \times \frac{\text{sin.}\,u^2\,\text{cos.}\,u^2}{\text{sin.}\,u^3} = \frac{du\,dq\,\text{cos.}\,q\,\text{cos.}\,u^2}{\text{sin.}\,u}$; & φA ou $\varphi(\text{cos.}\,p\,\text{cos.}\,\delta - \text{sin.}\,p\,\text{sin.}\,\delta\,\text{cos.}\,q)$ deviendra aussi $\varphi\,(\text{cos.}\,\delta - 2\,\text{sin.}\,u^2\,\text{cos.}\,\delta - 2\,\text{sin.}\,u\,\text{cos.}\,u\,\text{sin.}\,\delta\,\text{cos.}\,q)$.

5. Quant à l'attraction verticale, elle sera = à la fonction précédente, multipliée par $\frac{dp\,dq\,\text{sin.}\,p}{(1-\text{cos.}\,p)^{\frac{3}{2}}}$, c'est-

à-dire, par $\frac{du\,dq \text{ sin. } u \text{ cos. } u}{\text{sin. } u} = du\,dq$ cos. u.

6. On peut, si l'on veut, trouver l'équation du sphéroïde, en opérant sur cette fonction comme nous avons opéré tout-à-l'heure sur la fonction en δ, p, q; il faudra seulement observer que les intégrales en u & en q doivent être prises de maniere, qu'elles se terminent lorsque $u = 90$, & $q = 360$, ou lorsque $u = 180$, & $q = 180$.

7. L'équation $1 -$ cos. $p = 2$ sin. u^2, donne $2(1 - \text{cos. } p) = 4 \text{ sin. } u^2$, ou $QR^2 = 4 \text{ sin. } u^2$, d'où sin. $u = \frac{QR}{2}$; ainsi il est aisé de voir que sin. u est le sinus de l'angle que forme QR avec la tangente en Q.

Sur l'article 174 & suiv.

1. La différentielle de l'attraction horisontale étant $\frac{dp\,dq \text{ sin. } p^2 \text{ cos. } q}{(1 - \text{cos. } p)^{\frac{1}{2}}} \times \varphi(\text{cos. } p \text{ cos. } \delta - \text{sin. } p \text{ sin. } \delta \text{ cos. } q)$, il est aisé de voir que si $\varphi A = \text{cos. } A^m$, m étant un nombre quelconque positif, entier ou rompu, la difficulté se réduira, lorsque δ sera très-petit, à intégrer $\frac{x^n dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$, n étant un nombre quelconque; donc si $n = \frac{+r}{2}$, r étant un nombre entier impair, la différentielle se réduit à des arcs de cercle.

2. Supposons toujours (Fig. 15) $PQ = \delta$, $QR = p$, & l'angle $OQR = q$, soit $PR = \rho$, & imaginons que le sphéroïde ne soit pas un solide de révolution, en sorte que son rayon soit $r + \alpha\varphi(PR.\beta)$, β exprimant l'angle entre le méridien PR & un méridien fixe; on verra aisément qu'en nommant l'angle OPR, σ, & η l'angle entre le méridien fixe & le méridien PQO, on aura $\sigma = \beta \pm \eta$; d'où sin. $\sigma =$ sin. β cos. $\eta \pm$ cos. β sin. η, & cos. $\sigma =$ cos. β cos. $\eta \mp$ sin. β sin. η, par la même raison, sin. $\beta =$ sin. σ cos. $\eta \mp$ sin. η cos. σ, & cos. $\beta =$ cos. σ cos. $\eta \pm$ sin. σ sin. η. De plus, on remarquera que η est constant, ainsi que δ, que sin. $\sigma =$ (comme il est très-aisé de le voir) $\frac{\text{sin. } p \text{ sin. } q}{\text{sin. } \rho}$; & que

cos. $\sigma = \frac{\sqrt{(\text{sin. } \rho^2 - \text{sin. } p^2 \text{ sin. } q^2)}}{\text{sin. } \rho}$, ou plus simplement

$\frac{RK}{\text{sin. } \rho}$ (RK étant la projection de sin. ρ) $= \frac{RN + NK}{\text{sin. } \rho}$,

ou $\frac{RM \text{ cos. } \delta + MP}{\text{sin. } \rho} = \frac{\text{sin. } p \text{ cos. } q \text{ cos. } \delta + \text{cos. } p \text{ sin. } \delta}{\text{sin. } \rho}$; d'où

l'on voit que si la quantité φA est telle, que la quantité radicale sin. ρ disparoisse du dénominateur, & que sin. ρ, ou $\sqrt{(1 - \text{cos. } \rho^2)}$, se trouve élevé à une puissance paire, on pourra trouver aisément l'attraction verticale & horisontale d'un tel sphéroïde.

3. Il est encore bon d'observer que, si on exprime l'excès très-petit du rayon CR sur l'axe CP, par une fonction de $PR(\rho)$ & de β, il faut que cette fonction

foit telle, qu'en fuppofant l'angle ζ augmenté de $180°$, elle demeure la même; autrement on auroit deux fphéroïdes différens repréfentés par la même équation.

Sur l'article 194.

1. Si l'on veut faire exactement & rigoureufement le calcul des lignes dont il eft fait mention dans cet article, on confidérera (Fig. 15) qu'en faifant $CP = 1$, $CR = 1 + \varphi z$, l'angle OPR, n, & l'angle PCQ, δ, on auroit $CQ = 1 + \alpha\varphi\delta$, $CK = (1 + \alpha\varphi z)\,\text{cof.}\,z$, $RK = (1 + \alpha\varphi z)\,\text{fin.}\,z\,\text{cof.}\,n$; $NK = (1 + \alpha\varphi z)\,\text{cof.}\,z\,\frac{\text{fin.}\,\delta}{\text{cof.}\,\delta}$; $RN = RK - NK = \left(\frac{1 + \alpha\varphi z}{\text{cof.}\,\delta}\right) \times (\text{fin.}\,z\,\text{cof.}\,n\,\text{cof.}\,\delta - \text{cof.}\,z\,\text{fin.}\,\delta)$; $RM = RN\,\text{cof.}\,\delta = (1 + \alpha\varphi z) \times (\text{fin.}\,z\,\text{cof.}\,n\,\text{cof.}\,\delta - \text{cof.}\,z\,\text{fin.}\,\delta)$; $QM = 1 + \alpha\varphi\delta - CM$; & CM ou $CN + MN = \frac{CK}{\text{cof.}\,\delta} + \frac{RM \times \text{fin.}\,\delta}{\text{cof.}\,\delta} = (1 + \alpha\varphi z)\,\text{cof.}\,z\,\text{cof.}\,\delta + \text{fin.}\,z\,\text{cof.}\,n\,\text{fin.}\,\delta)$; d'où l'on tirera aifément la valeur de QR.

2. Si dans cet article 194, on fait $1 - \text{cof.}\,z\,\text{cof.}\,\delta - \text{fin.}\,z\,\text{fin.}\,\delta\,\text{cof.}\,n = x$, on aura $\text{cof.}\,n = \frac{1 - x - \text{cof.}\,z\,\text{cof.}\,\delta}{\text{fin.}\,z\,\text{fin.}\,\delta}$; & en regardant fin. z & fin. δ comme conftans, & fubftituant pour n fa valeur en x, on trouvera, par une méthode analogue à celle de l'art. 113, que l'intégration de la quantité qui multiplie φz dans l'expreffion des deux attractions, dépend, pour l'attraction

l'attraction horisontale, de la rectification d'une ellipse, & pour l'attraction verticale, de $\frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{(A+Bx+Cxx)}}$; c'est-à-dire, de la rectification d'une ellipse & d'une hyperbole.

3. Si on avoit sin. $\delta=0$ & cos. $\delta=1$, l'intégration se réduiroit, comme il est aisé de le voir, aux arcs de cercle ou aux logarithmes ; donc si on suppose sin. δ très-petit, il est aisé de voir que l'intégration dépendra encore en ce cas des arcs de cercle ou des logarithmes.

4. Puisque $\frac{RM}{QR^3}$ est égale à la différence (doublée) de $\frac{1}{(1-\text{cos}.\,z\,\text{cos}.\,\delta-\text{sin}.\,z\,\text{sin}.\,\delta\,\text{cos}.\,n)^{\frac{1}{2}}}$, divisée par $d\delta$, qu'on réduise en série cette quantité dans l'hypothèse que δ soit très-petit, après l'avoir mise sous la forme $[1-\text{cos}.\,z+\text{cos}.\,z(1-\text{cos}.\,\delta)-\text{sin}.\,z\,\text{sin}.\,\delta\,\text{cos}.\,n)^{-\frac{1}{2}}$, & qu'ensuite on la différentie par rapport à δ, on aura une suite de termes de la forme cos. $z^p(1-\text{cos}.\,\delta)^p\times$ sin. z^r sin. δ^r cos. $n^r\times\frac{1}{(1-\text{cos}.\,z)^{\frac{m}{2}}}$, dans lesquels il faudra négliger ceux où cos. n se trouvera à une puissance impaire, & ces termes multipliés par $\alpha dz\varphi z dn$ sin. z donneront l'élément de l'attraction horisontale. De plus il est clair que, si φz étoit constant, la quantité dont il s'agit, exprimeroit l'attraction horisontale d'une sphere, laquelle est $=0$.

5. A l'occaſion des calculs de cet article 194 ſur l'attraction du ſphéroïde, je ferai une remarque qui pourra être de quelqu'utilité.

6. Dans le troiſiéme Volume de mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, pag. 197 & ſuiv. j'ai fait voir que l'attraction d'une ſurface ſphérique eſt très-différente ſur un point placé à la ſurface même, ou à une diſtance infiniment petite en-dedans, ou en-dehors de cette ſurface, ce que j'ai depuis développé & expliqué dans le Tome I de mes *Opuſcules*, pag. 258 & ſuiv.

7. Il n'en eſt pas de même de l'attraction d'une ſphere ou d'une portion de ſphere, renfermée entre deux ſurfaces concentriques, ſur un point placé ſur cette ſurface, ou à une diſtance très-petite; car dans tous les cas, l'attraction eſt égale à la maſſe diviſée par le quarré de la diſtance du point au centre de la ſphere.

8. Or il doit en être de même de l'attraction d'un ſphéroïde ſur un point placé, ſoit à la ſurface, ſoit à une diſtance très-petite en-dedans ou en-dehors; & en effet, ſi dans les formules du troiſiéme Volume de nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, on prend celles qui donnent l'attraction du ſphéroïde à la ſurface, ou infiniment près de la ſurface, on trouvera qu'elles ſont les mêmes. Par exemple, pag. 175, Corol. II, les deux premieres formules donneront en retranchant la ſeconde de la premiere, & réduiſant à l'homogénéité, $\frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$; de même, pag. 195, la premiere formule du Corol. V, moins la ſeconde du

Corol. II, pag. 193, lesquelles formules répondent aux deux précédentes, en faisant $n = 0$, donnent, en réduisant à l'homogénéité $\frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$; & la premiere formule du Corol. VI, pag. 196, moins la troisiéme du Corol. IV, pag. 194, donne de même $-\frac{2}{3}$, on trouvera pareillement qu'en retranchant toujours la formule qui répond à $\frac{(x \pm n)\,dx}{(nn \pm 2nx + 2rx)^{\frac{3}{2}}}$, ($n$ étant successivement positif, zero, & négatif), des formules qui se correspondent l'une à l'autre dans les trois différentes suppositions sur la valeur de n, les résultats seront les mêmes.

9. Enfin, on trouveroit aussi les mêmes résultats en prenant les formules des pag. 209 & suiv., qui sont les mêmes que celles des pag. 192 & suiv.

10. Lorsque $\delta > r$, $\delta = r$, & $\delta < r$, δ étant dans les deux cas extrêmes infiniment peu différent de r, on trouve que la quantité $\varphi(PQ) \times \frac{-d\,\text{cos.}\,QR\,(\delta \pm \text{cos.}\,QR)}{(rr + \delta\delta \pm 2\delta\,\text{cos.}\,QR)^{\frac{3}{2}}}$ est $= 4\pi \times \varphi(PQ)$ dans le premier cas, $= 2\pi \times \varphi(PQ)$ dans le second, & $= 0$ dans le troisiéme. Cependant il sembleroit que dans le second, comme dans le troisiéme cas, elle devroit être $= 0$, par la théorie de l'attraction de la sphere.

11. Mais il faut remarquer qu'en retranchant cette quantité de la différentielle correspondante dans laquelle on a mis $\varphi(PR)$ au lieu de $\varphi(PQ)$, on a

pour facteur, au lieu de $\varphi(PQ)$, $\varphi(PR) - \varphi(PQ)$, qui devient évidemment zero en R, en sorte que $\varphi(PR)$ doit être regardée, comme formée de deux quantités $p + \varphi(PQ)$ telles, que la premiere est $= 0$ en R, & que l'attraction produite par la seconde $\varphi(PQ)$, de quelque maniere qu'on représente cette attraction, est entiérement détruite par une attraction contraire & semblable; ainsi le calcul du second cas est exact, & doit l'être, comme on peut le conclure aisément des remarques précédentes.

12. En effet, il arrive alors la même chose que, si au lieu de prendre, par exemple, l'intégrale de $\frac{x dx (r - x)}{(2rx)^{\frac{1}{2}}}$, dans la pag. 177 du troisiéme Volume de nos *Recherches sur le Systême du Monde*, & d'en retrancher l'intégrale de $\frac{x dx . r}{(2rx)^{\frac{1}{2}}}$, on retranchoit la seconde différentielle de la premiere, & qu'on prît l'intégrale de la différence $-\frac{xxdx}{(2rx)^{\frac{1}{2}}}$, laquelle seroit $= -\frac{2}{3}$, comme on le trouveroit par l'autre procédé; & ainsi du reste.

13. Cette remarque levera entiérement la crainte qu'on pourroit avoir, que les intégrales ne fussent quelquefois fautives, en s'y prenant par la méthode que nous avons donnée dans ce troisiéme Volume de nos *Recherches sur le Systême du Monde*; & cette obser-

vation a lieu, si je ne me trompe, pour toutes les autres méthodes, qu'on pourroit employer à la détermination de l'attraction, qu'un sphéroïde infiniment peu différent d'une sphere, exerce sur un de ses points quelconques.

Sur l'article 195.

1. Depuis que j'ai écrit ce qui est contenu dans cet article, j'ai vu que M. de la Place (dans les Mém. de l'Acad. de 1774) avoit aussi appliqué ses théorêmes sur la loi de la pesanteur, au cas du sphéroïde qui n'est pas de révolution. On voit que ces théorêmes se déduisent de notre méthode avec une grande facilité.

2. Ce même Académicien, à qui j'avois communiqué ma démonstration très-simple de son théorême, en a aussi trouvé depuis une autre plus simple que la premiere, & qu'il a lue à l'Académie au mois de Juillet 1778 (*a*). Il m'a appris en même-temps que M. de la Grange avoit aussi trouvé de son côté une démonstration de ce théorême général.

3. Si on suppose l'attraction proportionnelle à une puissance *n* de la distance, on trouvera aussi très-aisément, par le plus simple calcul, les théorêmes que M. de la Place a démontrés dans cette même addition à ses recherches, lue à l'Académie en 1778. En effet, il est clair, 1°. que l'attraction verticale a dans ce cas à l'ex-

(*a*) Elle a été imprimée dans le Volume de 1774, pag. 161 & suiv.

poſant du dénominateur $-\frac{n}{2}$ au lieu de 1, & qu'ainſi il faut ajouter à l'expoſant du dénominateur trouvé pour le cas de $n = -2$, $-\frac{n}{2} - 1$, ce qui rend cet expoſant $= -\frac{n}{2} - 1 + \frac{1}{2} = \frac{-n-1}{2}$, ou en numérateur, $+\frac{n+1}{2}$. 2°. Que l'expoſant de l'attraction horiſontale ſera, par la même raiſon, $-\frac{n}{2} - 1 + \frac{3}{2} = \frac{-n+1}{2}$, ou en numérateur $+\frac{n-1}{2}$; d'où réſultent les théorêmes dont il s'agit.

4. On voit auſſi que par les formules du Tom. V de nos *Opuſcules*, page 26 & ſuiv., la recherche de la figure de la terre ſe réduira dans ce cas, à l'intégration de $\frac{du \text{ ſin. } u^3 \text{ coſ. } u^m}{(1 - \text{coſ. } u)^{\frac{-n+1}{2}}}$, ou du ſin. u^3 coſ. $u^m \times (1 - \text{coſ. } u)^{\frac{n-1}{2}}$, facilement intégrable par les méthodes connues, au moins tant que n eſt un nombre entier.

Sur l'article 196.

1. Toutes les fois qu'en faiſant A infiniment petit, la valeur de r renferme ſin. $A^{\frac{m}{n}}$, $\frac{m}{n}$ étant une fraction, l'équilibre eſt impoſſible, quand même la figure n'auroit point d'équation réguliere. C'eſt encore une

suite de cet art. 196, & de la méthode de l'art. 193 pour trouver l'attraction du sphéroïde.

2. Ajoutons en même-temps que, quand on auroit démontré l'impossibilité de l'équilibre en regardant φA comme une fonction continue, elle ne seroit pas absolument démontrée pour cela dans le cas, très-possible, où φA seroit une fonction discontinue, ou plutôt une fonction non exprimable algébriquement, ni même sous une forme transcendante, quoique la courbe génératrice parût avoir aux yeux une courbure réguliere & continue. Nous avouerons néanmoins que la possibilité de l'équilibre dans ce cas est bien peu vraisemblable.

3. Si au lieu de faire commencer les arcs PR en P, on les faisoit commencer en un point quelconque Q du méridien, en sorte que PQ fût $= \delta$, & que le rayon r fût $= 1 + \alpha \varphi (\delta + z)$, alors supposant z infiniment petit, on trouveroit par une méthode semblable aux précédentes, qu'en prenant z infiniment petit, la valeur de r devroit être exprimée par $1 + a$ sin. $z +$ b sin. $z^2 + c$ sin. z^3, &c., ou, ce qui revient au même, à cause de z infiniment petit, $1 + a'z + b'z^2 + c'z^3$, &c.; d'où l'on conclura que ni ddr ni $d^n r$ ne sauroit jamais être infini. On a donc une nouvelle propriété, ou condition de φA, savoir, qu'en supposant A tel qu'on voudra (& non plus infiniment petit) $d^n \varphi A$ ne sauroit être infini.

Sur l'article 201.

S'il y a au centre du ſphéroïde fluide un noyau ſolide ſphérique, il ne ſera pas difficile de voir ce que ce noyau doit changer aux théorêmes dont il s'agit; car il eſt clair que ce noyau augmente l'attraction verticale de la quantité $\frac{4\pi\rho^3}{3(1+\alpha\varphi\delta)^2} \times (\Delta - 1)$, Δ étant ſuppoſé la denſité du noyau, & 1 celle du fluide; & que l'attraction verticale ne ſouffre aucune altération.

Sur l'article 202.

1. En ſuppoſant toujours le ſphéroïde peu différent d'une ſphere, on peut employer différentes méthodes pour déterminer l'attraction du ſphéroïde en un point quelconque.

On peut d'abord, en faiſant partir les rayons du centre du ſphéroïde, exprimer ces rayons par $1 + \alpha\varphi A$, comme nous l'avons fait.

2. Dans la même hypothèſe, au lieu de prendre A pour l'angle QCP, on peut prendre A pour l'angle QPC, qui a ſon ſommet au ſommet P du ſphéroïde, ou plutôt le complément à deux droits de cet angle, formé par la corde PQ & la tangente en P, complément qui eſt $= 0$ en P, ainſi que l'angle QCP.

3. On peut auſſi faire partir les rayons du ſommet du

du ſphéroïde dont on cherche l'attraction, & exprimer ces rayons par $\rho + \alpha\varphi A$, ρ étant le rayon correſpondant dans la ſphere dont le rayon ſeroit 1, & A exprimant l'angle QCP, ou l'angle QPC.

4. Outre ces différentes manieres d'exprimer la nature du ſphéroïde ou de ſa courbe génératrice, on peut encore s'y prendre de différentes manieres pour en trouver l'attraction.

5. On peut chercher cette attraction en intégrant les quantités $\frac{\alpha\varphi A}{\rho'^3}$, ρ' étant la diſtance d'un point quelconque de la courbe au point attiré, après avoir décompoſé cette quantité dans le ſens vertical & le ſens horiſontal. C'eſt la méthode que nous avons ſuivie dans nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, Tom. II & III, dans le Tome V de nos *Opuſc.* pag. 25 & ſuiv., & dans le Mémoire précédent.

6. On peut auſſi employer la méthode de M. de la Grange, dans les Mém. de Berlin, de 1773, en cherchant l'attraction des petites pyramides formées par les rayons qui ont leur ſommet au point dont on cherche l'attraction. Ces méthodes ont l'une & l'autre leurs avantages.

7. Ce n'eſt pas tout encore. Pour exprimer le rayon ρ', ou QR, & pour décompoſer l'attraction, on peut employer différentes méthodes.

8. Soit QR' (Fig. 17) la projection du rayon ρ' ſur le plan PQC, qui paſſe par l'axe PC, & par le point Q dont on cherche l'attraction, & ſoit $QR' = \rho''$,

l'angle $PCQ = \delta$, l'angle que fait le rayon ρ' avec ρ'', ζ, & l'angle $R'QC$, γ, on aura une valeur de ρ' en ζ, γ, δ, comme on en a une par les angles q, p, δ dans l'art. 173, & par les angles χ, η, δ dans l'art. 194.

9. On pourra de même avoir encore une autre valeur de ρ' par l'angle ζ, & par tout autre angle $R'QK$ de la projection $Q'R$ avec une ligne fixe QK de position quelconque.

10. Si cette ligne fixe QK est parallèle à l'axe, on décomposera pour lors l'attraction directe du point Q en deux autres, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à l'axe, & il faudra pour l'équilibre que les sommes ou intégrales de ces attractions soient entr'elles comme QZ à QH, QZ étant perpendiculaire à la courbe en Q.

11. Si la ligne fixe QK tombe sur la perpendiculaire QZ à la courbe, alors il faudra simplement (sans avoir égard à l'attraction verticale) que l'attraction horisontale soit nulle. Ce qui donnera une équation d'autant plus simple, que $\frac{4\pi}{3}$ n'y paroîtra pas, & que le second membre sera $= 0$.

12. Si on employoit cette derniere méthode, il seroit peut-être bon, pour plus de simplicité, d'exprimer la nature de la courbe génératrice par les valeurs de CZ en A.

13. On peut faire des remarques analogues aux pré-

cédentes, pour le cas où le ſphéroïde attirant n'eſt pas un ſolide de révolution. Nous abandonnons aux Géometres le détail de tous ces calculs, dont nous croyons qu'on pourra tirer parti pour perfectionner la théorie de l'attraction des ſphéroïdes.

14. M. Clairaut, dans ſon Livre de *la Figure de la Terre*, a déterminé l'attraction horiſontale à l'extrêmité d'un diametre quelconque, par le moyen des coupes elliptiques perpendiculaires à ce diametre; on pourroit employer ici la même méthode, mais elle ſeroit moins ſimple que celle que nous avons ſuivie.

Sur l'article 209.

1. Le même M. Clairaut, dans ſon Livre de *la Figure de la Terre*, trouve que l'équation entre f & α dans l'hypothèſe elliptique, eſt $f = \frac{4}{5}\alpha - \frac{2}{175}\alpha^2 + \frac{8}{875}\alpha^3$, &c. Cette équation n'eſt exacte que lorſque α eſt aſſez petit; dans les autres cas elle eſt peu exacte; mais on peut obſerver, 1°. que lorſque $\alpha = 0$, on a $f = 0$; d'où il s'enſuit que le ſphéroïde étant ſuppoſé elliptique & peu différent d'une ſphere, devient une ſphere exacte quand le fluide ne tourne pas. Nous avons de plus fait voir dans notre ſixiéme Volume d'*Opuſcules*, que dans ce cas de $f = 0$, il y a un autre ſphéroïde, mais infiniment applati, & par conſéquent illuſoire, qui ſatisfait à l'équilibre. Ne pourroit-on pas conclure delà que, s'il y a quelqu'autre hypothèſe que

celle de la figure elliptique, qui donne l'équilibre en ayant égard à la force centrifuge, cette figure deviendra toujours ſphérique lorſque f ſera $=0$. En effet, la valeur de f en α, exprimée par une ſuite quelconque, doit contenir α à tous ſes termes; en ſorte que $f = \alpha\varphi'\alpha$; d'où l'on voit que f étant $=0$, donne d'abord $\alpha=0$, d'où réſulte la figure ſphérique, & enſuite $\varphi\alpha=0$, qui dans le cas de l'ellipticité donne une valeur infinie & illuſoire, & ſemble devoir auſſi donner un pareil réſultat dans le cas de la non-ellipticité.

2. Nous avons donné, Tom. VI de nos *Opuſc.* l'équation exacte du ſphéroïde dans l'hypothèſe elliptique, ſavoir, $2\alpha = \frac{2k^2+g(ATk)-gk}{k^3}$. Pour exprimer cette équation par une ſérie, la plus convergente qu'il ſera poſſible, on mettra, au lieu de ATk, c'eſt-à-dire, de l'angle dont la tangente eſt k, $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}}$, x étant le ſinus verſe du même angle, & 1 le ſinus total, ce qui donnera $k = \frac{\sqrt{(2x-xx)}}{1-x}$; la quantité $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}}$, ou $\int \frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{(2-x)}}$ peut ſe réduire en une ſérie très-convergente, parce que x n'eſt jamais >1, & cette quantité ſera exprimée par une ſuite de cette forme, $A\sqrt{x} + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^{\frac{5}{2}}$, &c., enſuite on mettra pour $\frac{3k^2+g}{k^3}$ ſa valeur $\frac{3(1-x)^3}{(2x-xx)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{2x-xx+3(1-2x+xx)}{(1-x)^2}$;

& au lieu de $= \frac{gk}{k^3}$, ou $-\frac{g}{k^2}$ sa valeur $\frac{-g(1-x)^2}{2x-xx}$, ce qui donnera l'équation

$$\left[\frac{3(1-x)[1+2(1-x)^2]}{(2x-xx)^{\frac{3}{2}}} \times (A\sqrt{x}+Bx^{\frac{3}{2}}+Cx^{\frac{5}{2}} \&c.)\right]$$

$-\frac{g(1-x)^2}{2x-xx}=2\omega$; équation dont le radical $\sqrt{x}$ disparoîtra, comme il est aisé de le voir à cause de $(2x-xx)^{\frac{3}{2}}=x^{\frac{3}{2}}(2-x)^{\frac{3}{2}}$; & dont on pourra encore faire disparoître le radical $\sqrt{(2-x)}$, en faisant $\sqrt{(2x-xx)}=\sqrt{x}z^2$, ce qui donne $2-x=zz$, & $x=2-zz$; & on peut remarquer que z est la corde qui répond au sinus verse x.

Sur l'article 210.

1. Lorsque le sphéroïde est elliptique, la valeur du rayon r est donnée par la proportion r^2 sin. $A^2 : 1-r^2$ cos. $A^2 :: (1+\alpha)^2 : 1$, d'où r^2 sin. $A^2=(1+\alpha)^2 - (r^2 \text{ cos. } A^2)(1+\alpha)^2$, & $rr=\frac{(1+\alpha)^2}{1+(2\alpha+\alpha\alpha)\text{ cos. } A^2}$, ou enfin $r=\frac{1+\alpha}{\sqrt{[(1+\alpha)^2-\text{sin. } A^2(2\alpha+\alpha\alpha)]}}=$

$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\text{sin. } A^2(2\alpha+\alpha\alpha)}{(1+\alpha)^2}\right)}}$; d'où l'on voit que la valeur de r est $=1+\alpha\times\varphi$ sin. A, cette fonction de sin. A, renfermant elle-même la quantité α.

2. Or dans la théorie que nous avons donnée, nous avons supposé que φA ne contenoit point α. Il seroit bon de voir aussi ce qui résulteroit du cas où φA contiendroit α, c'est-à-dire, où r seroit $= 1 + \varphi(A, \alpha)$, α étant une quantité très-petite, & $\varphi(A, \alpha)$ étant telle, qu'elle soit $= 0$ quand $A = 0$. Ce seroit l'objet d'une nouvelle recherche dans laquelle nous ne nous engagerons point ici.

3. Nous nous bornerons à remarquer, 1°. que l'équation approchée de l'ellipse est $r = 1 + \alpha$ sin. A^2. 2°. Que par conséquent si on fait $\varphi A =$ sin. A^2, & qu'on ait de plus égard à la force centrifuge, le sphéroïde dont l'équation seroit $r = 1 + \alpha$ sin. A^2, α étant supposé très-petit, seroit à très-peu-près en équilibre, c'est-à-dire, qu'il ne s'en faudroit que d'une quantité de l'ordre de α^2, censée infiniment petite du second ordre, que l'équilibre n'eût lieu dans un tel sphéroïde. 3°. Que l'équilibre seroit exact & parfait, si on ajoutoit à la quantité α sin. A^2 dans la valeur de r, ce qu'il faut pour que r appartînt exactement à une ellipse dont la différence des axes fût $= \alpha$. 4°. Que cette quantité qu'il faudroit ajouter à α sin. A^2 pour avoir la valeur exacte de r, seroit celle qui résulteroit du développement du radical

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\text{sin.} A^2 (2\alpha + \alpha^2)}{(1+\alpha)^2}\right)}}$$, c'est-à-dire, une série infinie, dont les deux premiers termes seroient évidem-

ment $1 + \alpha$ fin. A^2, & de laquelle il faudroit ôter ces deux premiers termes, déja employés dans la valeur de r.

4. Delà on voit que s'il y a quelque fonction de A différente de fin. A^2, qui donne l'équilibre du sphéroïde, soit en ayant égard à la force centrifuge, soit en la supposant nulle, cette fonction de A ne donne point, ainsi que fin. A^2, l'équilibre rigoureux, mais seulement à une quantité près de l'ordre de α^2.

5. De plus, lorsque $\varphi A =$ fin. A^2, on sait d'ailleurs que l'équilibre rigoureux est possible, en ajoutant à $r = 1 + \alpha$ fin. A^2, ce qui est nécessaire pour faire appartenir le rayon r à un sphéroïde rigoureusement elliptique, & peu différent d'une sphere; cette quantité ajoutée contiendroit α & A, & la moindre puissance de α y seroit α^2, & ne seroit nulle que lorsque α seroit $= 0$, auquel cas α fin. A^2 seroit aussi $= 0$, & $r = 1$, ce qui donneroit une sphere.

6. Mais on peut demander en premier lieu si dans ce cas de $r = 1 + \alpha$ fin. A^2, il ne seroit pas possible d'ajouter à la valeur de r, pour établir l'équilibre, non-seulement la valeur convenable au sphéroïde rigoureusement elliptique, mais d'autres fonctions de α & de A, dans lesquelles la moindre puissance de α seroit plus grande que l'unité, ou même $= \alpha^2$, & qui donneroient également l'équilibre? En ce cas, tous ces sphéroïdes, (à l'exception du sphéroïde rigoureusement elliptique)

différeroient en rigueur du ſphéroïde elliptique d'une quantité de l'ordre de α^m, m étant > 1, ou même $= 2$; & on pourroit en conclure, avec aſſez de vraiſemblance, que, ſi la force centrifuge f n'étoit pas très-petite, il y auroit pluſieurs ſphéroïdes, différant ſenſiblement les unes des autres, & dont un ſeul ſeroit elliptique, qui donneroient l'équilibre.

7. On peut demander en ſecond lieu ſi dans le cas où $r = 1 + \alpha \varphi A$, (φA étant une certaine fonction de A) donneroit l'équilibre à une quantité près de l'ordre de α^2, on pourroit trouver, comme dans le cas de $r = 1 + \alpha$ ſin. A^2, une quantité qui étant ajoutée à la valeur $1 + \alpha \varphi A$ du rayon r, donneroit l'équilibre exact & rigoureux? Si cette quantité exiſtoit, il eſt évident qu'elle contiendroit α & φA, & que la plus petite puiſſance de α y ſeroit α^m, m étant > 1. De plus, il ſe pourroit encore (comme nous venons de le remarquer pour le cas de $r = 1 + \alpha$ ſin. A^2) que cette quantité, ajoutée à la valeur de r pour l'équilibre exact, ne fût pas unique, & qu'on pût faire différens changemens à la valeur de r, tous d'un ordre α^m plus petit que α, qui donneroient l'équilibre rigoureux.

8. Toutes ces queſtions ſont à-peu-près de la même nature, que celle que nous avons agitée dans le Tom. VI de nos *Opuſc.* pag. 223, ſavoir, ſi dans le cas où le ſphéroïde a un noyau tel, qu'il eſt, à très-peu-près, en équilibre en donnant à α telle valeur qu'on veut, l'équilibre exact & rigoureux eſt poſſible, en faiſant

à

à la figure du sphéroïde un changement d'un ordre moindre que α.

9. En général il paroît assez vraisemblable & assez naturel de supposer que lorsqu'un sphéroïde, dont la différence des axes est α ou de l'ordre de α, dans quelqu'hypothèse que ce soit, a une figure où l'équilibre a lieu à une quantité près de l'ordre de α^m, m étant > 1, un changement de l'ordre de α^m, fait à ce sphéroïde, donneroit l'équilibre rigoureux. Mais la chose n'est rigoureusement certaine que dans le seul cas où $r = 1 + \alpha$ sin. A^2, & où le sphéroïde est entierement homogène, & tourne sur son axe; les théories connues nous apprennent que ce sphéroïde, supposé rigoureusement elliptique, sera en équilibre. Dans les autres cas, on ne pourroit résoudre exactement les questions que nous proposons ici, que par un calcul très-compliqué, très-subtil, & qui peut-être passe les forces de l'analyse connue.





LIV. MÉMOIRE,

Contenant différentes Recherches d'Optique.

§. I.

Sur les loix de la réfraction.

1. M. Newton a prétendu dans son *Optique*, (Liv. I, Part. II, Prop. III, Exp. VIII) que si un rayon qui a traversé différens milieux *B*, *C*, contigus à un même milieu *A*, (le rapport des sinus, pour les rayons des couleurs extrêmes dans le passage de *A* à *B*, *C* étant supposé $\frac{1}{m}$ & $\frac{1}{m'}$, $\frac{1}{M}$ & $\frac{1}{M'}$), si ce rayon, dis-je, sort parallèle à sa premiere situation, la lumiere sera blanche, & il a conclu delà, 1°. que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1} = \frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1}$, 2°. Que le rapport des sinus dans le passage de *B* à *C* sera $\frac{m}{M}$ & $\frac{m'}{M'}$. M. Klingenstjerna a dé-

montré que la premiere de ces deux loix ne pouvoit subsister avec la prétendue blancheur des rayons, résultante du parallélisme. Voyez le sixiéme Volume de nos *Opusc.* XLIXe Mém. art 1, 2, 3, 4 & 5.

2. Comme il est très-essentiel de démontrer que

$$\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$$, n'est pas constant, puisque si cette équation avoit lieu, les couleurs ne pourroient jamais être détruites dans les lunettes, j'ai observé, ce me semble, avec raison, que M. Klingenstierna n'a pas démontré en général la fausseté de cette équation, mais seulement que cette équation ne pouvoit subsister avec la prétendue blancheur résultante du parallélisme des rayons émergens aux incidens.

3. Des amis de feu M. Klingenstierna m'ont objecté que cet habile Mathématicien ne regardoit pas l'expérience de M. Newton sur cette prétendue blancheur, comme vraie, & qu'au contraire il la croyoit fausse. En ce cas, sa démonstration de l'incompatibilité des deux assertions, ne prouve point ce qu'il étoit le plus essentiel de démontrer, savoir, que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ n'est pas constant, puisque sa démonstration est appuyée sur une supposition fausse, & reconnue, dit-on, pour telle par lui-même. Il se peut que M. Klingenstierna se soit

ſeulement propoſé de démontrer l'*incompatibilité* de la *prétendue* loi de Newton avec ſon expérience auſſi *prétendue*; cela ſuffit pour jetter un doute très-bien fondé, ou ſur la loi, ou ſur l'expérience, ou même ſur l'une & ſur l'autre, mais non pas pour démontrer rigoureuſement la fauſſeté de la loi. Il faut avoir recours pour cela à des moyens directs, & indépendans de toute hypothèſe.

4. On dira peut-être, comme je l'ai déja remarqué, (Tom. VI, *Opuſc.* pag. 269, art. 20) qu'il y a des cas où l'expérience de Newton peut être vraie, c'eſt-à-dire, où les rayons ſortent blancs & parallèles aux incidens, & qu'ainſi il réſulte de la démonſtration de M. Klingenſtierna, que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ n'eſt pas conſtant. Mais il réſulte de cette même démonſtration que, ſi $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ étoit conſtant, il n'y auroit aucun cas où l'expérience de Newton pût être vraie, & comme on ne ſauroit prouver *à priori*, ſans avoir recours à l'obſervation, que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ n'eſt pas conſtant, il s'enſuit qu'il auroit fallu s'aſſurer auparavant par l'expérience qu'il y a des cas

où l'expérience de Newton eſt vraie, ce que M. Klingenſtierna ne paroît pas avoir fait.

5. Il y a plus ; nous avons prouvé (Tom. VI, *Opuſc.* pag. 269, art. 20 & 21, & pag. 287, art. 11) que le parallélisme de tous les rayons émergens à tous les incidens, c'eſt-à-dire, le parallélisme de tous les rayons émergens entr'eux, (& par conſéquent la blancheur du rayon émergent) eſt impoſſible, non-ſeulement ſi $\frac{d\mu}{1-\mu} = \frac{dm}{1-m}$, mais encore ſi $\frac{d\mu}{1-\mu}$ eſt $< \frac{dm}{1-m}$. Ainſi pour que l'expérience de Newton ſoit poſſible, même en un ſeul cas, il faut que $\frac{d\mu}{1-\mu}$ ſoit $> \frac{dm}{1-m}$, propoſition qu'on ne peut ſuppoſer vraie ſans le ſecours de l'expérience.

6. On voit bien en effet (Mém. Acad. 1756, pages 384 & 385) que d'après les expériences de M. Dollond, le rayon émergent peut être parallèle à l'incident ſans que la lumiere ſoit blanche au ſortir du priſme, mais on ne voit pas que perſonne ait examiné s'il y a un ſeul cas où le parallélisme & la blancheur aient lieu à-la-fois.

7. Remarquons encore que ſi la blancheur n'a pas lieu lorſque le rayon émergent eſt parallèle à l'incident, c'eſt qu'il n'y a en effet qu'un rayon émergent d'une ſeule couleur, qui ſoit parallèle au rayon incident

de la même couleur, & que ce parallélisme n'a pas lieu pour les autres rayons.

8. Observons de plus que la démonstration même de M. Klingenstierna n'a lieu, qu'en supposant la seconde loi de Newton vraie, savoir, que le rapport des sinus en passant du milieu B dans le milieu C soit $\frac{m}{M}$ & $\frac{m'}{M'}$. C'est ce qui résulte évidemment du Tome VI de nos *Opusc.* pag. 262, art. 4 & 5. Cette supposition, il est vrai, paroît assez bien prouvée par les expériences; mais elle ne peut être démontrée *à priori*. Car en supposant que le rapport des sinus du milieu A dans le milieu B soit $\frac{1}{m}$, il n'est pas même rigoureusement démontré que le rapport des sinus du milieu B dans le milieu A soit $\frac{m}{1}$.

9. En un mot, tout ce que j'ai prétendu, c'est que la preuve donnée par M. Klingenstierna, que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ n'est pas constant, étoit seulement hypothétique, & non pas absolue & rigoureuse, comme la théorie des lunettes achromatiques exige qu'elle le soit; & il me semble que mes assertions sur ce sujet, subsistent dans leur entier.

10. Ce qui prouve encore, ce me semble, que la démonstration de M. Klingenstierna contre la prétendue

loi de Newton, n'eſt qu'hypothétique, c'eſt, 1°. qu'à la fin de ſon écrit (Voy. Mém. Acad. 1756, pag. 407), il dit que cette loi *paroît mériter* d'être vérifiée de nouveau par des expériences; ce qui prouve qu'il la regardoit, non comme fauſſe, mais comme douteuſe. 2°. Qu'il démontre qu'en ſuppoſant l'expérience de Newton vraie, la loi de Newton a lieu lorſque les réfractions ſont petites, d'où il conclut avec raiſon que ſi l'expérience eſt vraie, l'aberration de réfrangibilité ne pourroit ſe corriger dans les lunettes, *comme Newton l'a prétendu.* Ainſi, d'après les démonſtrations de M. Klingenſtierna, & d'après ſon aveu même, il reſtoit à prouver abſolument & rigoureuſement, ſoit par la théorie, ce qui ne paroît pas facile, ſoit par l'expérience, que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ n'eſt pas $=\frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1}$, vérité néceſſaire pour la conſtruction des lunettes achromatiques, & bien plus eſſentielle pour la perfection de la Dioptrique, que le paralléliſme ou non parallé-liſme des rayons émergens aux incidens, au ſortir d'un priſme placé dans deux différens milieux.

11. Quant à ce que prétendent les défenſeurs de M. Klingenſtierna, qu'il n'a pas ſuppoſé poſſible le parallélifme des rayons émergens aux incidens, c'eſt une queſtion indifférente à celle dont il s'agit ici, c'eſt-à-dire, à la démonſtration rigoureuſe & abſolue de la

fausseté de la loi de Newton. Il paroît par l'écrit inséré dans les Mém. Acad. 1756, que M. Klingenstierna n'y a pas, au moins formellement, révoqué en doute ce parallélisme. Mais cet écrit n'est, à ce qu'on assure, qu'un extrait du Mémoire entier de ce Mathématicien sur le même objet, imprimé en Suédois dans les Mémoires de l'Académie de Stockolm, pour l'année 1754. Je m'en rapporte donc, sur la question dont il s'agit, à ceux qui ont lu ce Mémoire en entier.

12. Nous avons dit ci-dessus (art. 1), que selon M. Newton, si son expérience est vraie, le rapport des sinus dans le passage de B à C sera $\frac{m}{M}$ & $\frac{m'}{M'}$. Or cette derniere loi étant admise par tous les Opticiens, & l'expérience de Newton n'étant pas vraie, comme M. Dollond l'a démontré (Voyez Mém. Acad. 1756, pag. 385), que deviendra la conséquence tirée par Newton, sur le rapport $\frac{m}{M}$ des sinus, & jusqu'ici reçue en Optique, comme une vérité constante? vérité dont nous avons nous-mêmes fait usage pour démontrer rigoureusement le théorême de M. Klingenstierna (*Opuscules*, Tom. VI, pag. 261, art. 4 & 5).

13. La réponse est que l'expérience de Newton est vraie, lorsque les deux faces du prisme sont parallèles, c'est-à-dire, lorsque le prisme est supposé changé en un parallélépipéde; alors les rayons émergens de toutes les couleurs sont parallèles aux incidens, & delà

delà il est aisé de démontrer la seconde loi sur le rapport $\frac{m}{M}$ des sinus dans le passage de *B* à *C*. C'est ce qu'on peut voir dans les *Opuscules* de Newton, Opusc. XVIII, *Leçons Optiques*, art. XXXIII.

14. Au reste, cette démonstration est appuyée sur une hypothèse que tous les Opticiens ont admise jusqu'ici d'après l'expérience, savoir, qu'un rayon qui étant réfracté d'un milieu quelconque dans un autre, revient sur ses pas, & repasse du second milieu dans le premier, reprend dans ce premier milieu (en sens contraire) la même direction qu'il avoit quand il est entré du premier milieu dans le second. Or delà il est aisé de conclure qu'un rayon, qui tombe sur un verre plan placé dans l'air ou dans tout autre milieu, en sortira parallèle à lui-même. S'il y avoit de même plusieurs milieux *A*, *B*, *C*, &c. placés dans l'air, ou dans tout autre milieu *D*, terminés par des surfaces planes parallèles, & non contigus entr'eux, le rayon réfracté dans ces différens milieux sortiroit encore parallèle à lui-même, puisqu'à la sortie de chaque milieu *A*, *B*, *C*, &c. il repasseroit dans l'air ou dans le milieu *D*. Mais la supposition que font les Opticiens sur la réciprocité des rayons incident & réfracté, supposition sur laquelle est appuyé le parallélisme dont nous venons de parler, a besoin d'être prouvée, comme elle l'est en effet, par l'expérience, & ne peut être démontrée rigoureusement par la théorie, quoique cette supposition paroisse d'ail-

leurs assez naturelle. En effet, supposons, par exemple, que le rapport des sinus dépende du rapport de densité des deux milieux, Δ, Δ', & soit une fonction de ce rapport, c'est-à-dire, $\varphi\left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right)$; il est clair que si h est le sinus d'incidence, & h' le sinus de réfraction, on aura $h' = h\varphi\left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right)$. Maintenant soit h' le sinus d'incidence du milieu Δ' dans le milieu Δ, on aura le sinus de réfraction $= h'\varphi\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right)$ qui ne peut être égal à h, que dans le cas où $\varphi\left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right) \times \varphi\left(\frac{\Delta'}{\Delta}\right) = 1$; c'est-à-dire, dans certaines suppositions sur la valeur de $\varphi\left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right)$, par exemple, si $\varphi\left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right) = \frac{\Delta^m}{\Delta'^m}$, m étant un nombre quelconque.

15. Lorsque les milieux A, B, C, &c. sont contigus, toujours terminés par des surfaces parallèles, & environnés du milieu D, l'expérience alléguée par Newton, prouve encore que dans ce cas le parallélisme a lieu entre le rayon incident & les rayons émergens, comme dans le cas où les milieux A, B, C, &c. ne sont point contigus. Or delà il est aisé de conclure, ce qui est encore assez naturel, qu'un rayon qui passe d'un milieu A dans un milieu B, immédiatement contigu, souffre dans ce milieu B la même réfraction, que s'il passoit du milieu A dans le milieu D, & ensuite dans le milieu B. En effet, soit h le sinus d'in-

cidence, mh le sinus de réfraction dans le milieu A, $m' \times mh$ le sinus de réfraction du milieu A dans le milieu contigu B, le sinus de réfraction du milieu B dans l'air, sera (*hyp.*) $= h = m' \times mh \times \frac{1}{mm'}$; ainsi $\frac{1}{mm'}$ sera le rapport des sinus en passant du milieu B dans le milieu D; & du milieu D dans le milieu B, ce rapport sera (art. 14) $= m'm$; or du milieu A dans le milieu D, ce rapport est $\frac{1}{m}$, & par conséquent le sinus de réfraction mh du milieu D dans le milieu A, deviendroit $mh \times \frac{1}{m} = h$ en repassant du milieu A dans le milieu D; donc en passant du milieu D dans le milieu B, le sinus de réfraction sera $h \times mm'$, comme en passant du milieu A dans le milieu B.

16. On peut voir au reste sur les loix de la réfraction à travers différens milieux, notre XLIXe Mém. Tom. V de nos *Opusc.* & sur-tout le §. VI de ce Mémoire, & les art. 25, 26 & 27; ainsi que les Mém. de l'Acad. de 1767, pag. 97.



§. II.

Considérations sur la Réfraction des rayons dans un ou plusieurs prismes.

Les recherches qu'on va lire, sont en quelque maniere la suite du paragraphe précédent. Nous y donnerons la théorie des rayons qui entrent & sortent parallèles d'un ou de plusieurs prismes ; théorie peu difficile en elle-même, mais qui nous a conduits à quelques constructions assez simples, & à quelques résultats qui pourront être utiles.

1. Soit un prisme BAC (Fig. 18) dont l'angle $BAC = 2\alpha$, DF un rayon qui tombe sur le côté AB, EFG perpendiculaire à AB, l'angle $DFE = k$; le rayon rompu FL, tel que l'angle $GFL = \zeta$ & sin. $\zeta = m$ sin. k, enfin le rayon de nouveau rompu LI, tel que l'angle $HLI = \omega$, & sin. $\omega = \frac{1}{M}$ sin. FLK, HLK étant perpendiculaire au côté AC.

2. Il est aisé de voir, en nommant LR parallèle à GFE qu'on aura $FLK = FLR + RLK = LFG + GAF = 2\alpha + \zeta$; donc on aura sin. $\omega = \frac{1}{M}$ sin. $(2\alpha + \zeta)$. On suppose ici, pour plus de généralité, que les côtés AB, AC du prisme, sont placés dans des milieux

différens B, C; d'où naît la différence des quantités m & M.

3. Maintenant, l'angle k étant le même, si on suppose deux autres quantités m' & M' pour un rayon d'une autre couleur, on aura $\text{fin.}\ \beta' = m'\ \text{fin.}\ k$; & $\text{fin.}\ \omega' = \frac{1}{M'}\ \text{fin.}\ (2\alpha + \beta')$.

4. Si l'on veut donc que les deux rayons sortent parallèles, comme on suppose qu'ils sont entrés, on aura $\omega = \omega'$, & $\text{fin.}\ \omega = \text{fin.}\ \omega'$. Donc $\frac{1}{M}\ \text{fin.}(2\alpha + \beta) = \frac{1}{M'}\ \text{fin.}\ (2\alpha + \beta')$. Donc $\frac{1}{M}\ \text{fin.}\ 2\alpha\ \text{cof.}\ \beta + \frac{1}{M}\ \text{cof.}\ 2\alpha\ \text{fin.}\ \beta = \frac{1}{M'}\ \text{fin.}\ 2\alpha\ \text{cof.}\ \beta' + \frac{1}{M'}\ \text{cof.}\ 2\alpha\ \text{fin.}\ \beta'$, ou en mettant pour $\text{fin.}\ \beta$ & $\text{fin.}\ \beta'$ leurs valeurs, $m\ \text{fin.}\ k$, & $m'\ \text{fin.}\ k$, & réduisant $\text{fin.}\ 2\alpha (M'\ \text{cof.}\ \beta - M\ \text{cof.}\ \beta') = \text{cof.}\ 2\alpha\ (Mm' - mM')\ \text{fin.}\ k$.

5. Donc $\text{cot.}\ 2\alpha\ (Mm' - mM') = \frac{M'\ \text{cof.}\ \beta}{\text{fin.}\ k} - \frac{M\ \text{cof.}\ \beta'}{\text{fin.}\ k} =$ (à cause de $\text{fin.}\ k = \frac{\text{fin.}\ \beta}{m} = \frac{\text{fin.}\ \beta'}{m'}$) $M'm\ \text{cot.}\ \beta - Mm'\ \text{cot.}\ \beta'$. De plus, les deux équations $\frac{\text{fin.}\ \beta}{m} = \frac{\text{fin.}\ \beta'}{m'}$, donnent $\frac{1}{m\sqrt{(1 + \text{cot.}\ \beta^2)}} = \frac{1}{m'\sqrt{(1 + \text{cot.}\ \beta'^2)}}$. Donc si on fait $\text{cot.}\ \beta = x$, $\text{cot.}\ \beta' = z$, & $\text{cot.}\ 2\alpha = a$, on aura les deux équations $(Mm' - mM')a = M'mx - Mm'z$, & $m\sqrt{(1 + xx)} = m'\sqrt{(1 + zz)}$; d'où l'on tire

$$m^2(1+xx)=m'^2\left[1+\left(\frac{M'mx}{Mm'}-a+\frac{M'ma}{Mm'}\right)^2\right];$$

équation du second degré qui donnera deux valeurs de x, & par conséquent de z.

6. On pourroit tirer de la résolution de cette équation une valeur de x, qui étant construite géométriquement à l'ordinaire, donneroit la valeur de l'angle ζ, & par conséquent celle de l'angle ζ'. Mais on peut trouver, comme nous le verrons plus bas, une construction géométrique beaucoup plus simple. Cependant, comme x & z sont ici les cotangentes des angles ζ & ζ', & que ces cotangentes peuvent être données par le calcul de l'équation précédente, nous donnerons ici ce calcul, qui fera trouver les angles ζ & ζ' au moyen des Tables des sinus, lesquelles renferment aussi les tangentes & les cotangentes.

7. Nous aurons donc, après les réductions, l'équation

$$xx-\frac{2M'x(Mm'a-M'ma)}{(M'^2-M^2)m}=\frac{M^2}{m^2}\left(\frac{m^2-m'^2}{M'^2-M^2}\right)-\frac{(Mm'a-M'ma)^2}{m^2(M'^2-M^2)};$$

d'où

$$x=\frac{M'(\cot. 2\alpha)(Mm'-M'm)}{m(M'^2-M^2)}\pm\frac{M}{m}\sqrt{\left(\frac{(\cot. 2\alpha)^2(Mm'-M'm)^2}{(M'^2-M^2)^2}+\frac{m^2-m'^2}{M'^2-M^2}\right)}.$$

8. Donc si on fait $\frac{\cot. 2\alpha(Mm'-M'm)}{M'^2-M^2}=A$ & $\frac{m^2-m'^2}{M'^2-M^2}=\pm B^2$, on aura $x=\frac{M'.A}{m}\pm\frac{M}{m}\sqrt{(A^2\pm B^2)}$, valeur qu'on peut trouver également,

ou par une construction géométrique, ou par le calcul arithmétique.

9. Si on met dans la valeur de x, m' pour m, M' pour M, & réciproquement, on trouvera la valeur de $z = \frac{M.A}{m'} \pm \frac{M'}{m'} \sqrt{(A^2 \pm B^2)}$, & l'on remarquera que si on prend dans la valeur de x le signe $+$ au-devant du signe radical, il faudra faire la même chose dans celle de z; dont la raison est que $M'mx - Mm'z$ doit être $= (Mm' - mM')$ cot. 2α, (art. 5), ce qui ne pourroit pas être, si on prenoit les radicaux de signe différent dans les valeurs de x & de z.

10. On peut remarquer, en mettant pour cot. $2\alpha^2$ sa valeur $\frac{1 - \text{sin. } 2\alpha^2}{\text{sin. } 2\alpha^2}$, que la quantité radicale qui entre dans les valeurs de x & de z, se change en $\pm$
$$\frac{M}{m(M'^2 - M^2)} \times \frac{\sqrt{[(Mm' - M'm)^2 - \text{sin. } 2\alpha^2 (M'm' - Mm)^2]}}{\text{sin. } 2\alpha}.$$

11. Delà on voit que le problême est impossible, si on a $(\text{sin. } 2\alpha)^2 > \frac{(Mm' - M'm)^2}{(M'm' - Mm)^2}$; ce qui sera encore prouvé autrement dans la suite.

12. Si les angles 2α, k, ζ, ζ' sont fort petits, on aura, à très-peu-près, (art. 4) $\frac{1}{M}(2\alpha + mk) = \frac{1}{M'}(2\alpha + m'k)$, ou $2M'\alpha + M'mk = 2M\alpha + Mm'k$, équation qui établit la relation entre α & k, M & M' étant donnés ainsi que m & m'.

13. Si on suppose de plus $M' = M + dM$, & $m' = m + dm$, on aura $2\alpha dM = (Mm' - M'm)k = (Mdm - mdM)k$. D'où l'on tire $k = \frac{2\alpha dM}{Mdm - mdM}$.

14. Si la quantité $\frac{dM}{Mdm - mdM}$, ou $\frac{dM}{dm} - \frac{M}{m}$ est négative, k sera négatif, c'est-à-dire, DF tombera de l'autre côté de FE.

15. Et si $\frac{dM}{dm} = \frac{M}{m}$, alors k sera infini, ce qui est impossible, & contraire d'ailleurs à la supposition présente, que 2α, k, β & β' sont très-petits.

16. Telles sont les conséquences principales qu'on peut tirer de la solution algébrique donnée ci-dessus. Mais on peut trouver de la maniere suivante une solution beaucoup plus simple de ce problême.

17. Puisque $\frac{\text{sin. } \beta'}{\text{sin. } \beta} = \frac{m'}{m}$, & $\frac{\text{sin. } (2\alpha + \beta')}{\text{sin. } (2\alpha + \beta)} = \frac{M'}{M}$, on aura donc, 1°. $\frac{\text{sin. } \beta' + \text{sin. } \beta}{\text{sin. } \beta' - \text{sin. } \beta} = \frac{m' + m}{m' - m}$, ou, ce qui revient au même, comme on le sait par la Trigonométrie, $\frac{\text{tang. } \left(\frac{\beta + \beta'}{2}\right)}{\text{tang. } \left(\frac{\beta' - \beta}{2}\right)} = \frac{m' + m}{m' - m}$. Par la même raison, on aura, 2°. $\frac{\text{sin. } (2\alpha + \beta') + \text{sin. } (2\alpha + \beta)}{\text{sin. } (2\alpha + \beta') - \text{sin. } (2\alpha + \beta)} = \frac{M' + M}{M' - M}$

=

$$= \frac{\text{tang.}\left(2\alpha+\frac{\zeta'+\zeta}{2}\right)}{\text{tang.}\left(\frac{\zeta'-\zeta}{2}\right)}\text{; d'où } \frac{\text{tang.}\left(\frac{\zeta+\zeta'}{2}\right)}{\text{tang.}\left(2\alpha+\frac{\zeta+\zeta'}{2}\right)} =$$

$\frac{(m'+m)(M'-M)}{(m'-m)(M'+M)}$; ainsi nommant $\frac{\zeta+\zeta'}{2}$, x, on aura $\frac{\text{tang. } x}{\text{tang. }(2\alpha+x)} = \frac{1}{R}$, 2α & R étant donnés, & en faisant $\frac{\zeta'-\zeta}{2} = y$, on aura $\frac{\text{tang. } x}{\text{tang. } y} = \frac{m'+m}{m'-m}$. On remarquera de plus que $R = \frac{M'+M}{M'-M} \times \frac{m'-m}{m'+m}$.

18. Delà on tire cette construction très-simple. Soit menée FP (Fig. 19) perpendiculaire à AG, & ayant pris FL à volonté, soit fait FL à $Fi :: R : 1$. Ensuite du diametre Li soit décrit un demi-cercle qui coupe FG en K, & ayant joint iK, soit tirée FS parallèle à IK, je dis d'abord que l'angle $KFS = x$. Car tirant LKS, l'angle IKL sera évidemment droit, ainsi que FSL, & on aura $SL : KS :: FL : Fi :: R : 1$; c'est-à-dire, $\frac{\text{tang. } KFS}{\text{tang. } LFS} = \frac{1}{R}$. Or $LFS = PFG + KFS = 2\alpha + KFS$. Donc (art. 17) $KFS = x$.

19. On a de plus, à cause de $\zeta' + \zeta = 2x$, & $\zeta' - \zeta = 2y$, $\zeta' = x + y$, $\zeta = x - y$, & tang. $y = \frac{\text{tang. } x\,(m'-m)}{m'+m}$. Prenant donc sur KS & sur son prolongement les deux lignes égales SV, & Su, qui

ſoient $= KS \times \frac{(m'-m)}{m'+m}$, & tirant FV & Fu, on aura l'angle $KFV = \zeta$, & $KFu = \zeta'$.

20. On peut ſimplifier encore cette conſtruction en trouvant immédiatement, & tout de ſuite, les angles ζ & ζ', ſans avoir beſoin de l'angle x. Pour cela, on conſidérera, 1°. que tang. x : tang. $(2\alpha + x)$ :: $\frac{m'+m}{m'-m}$: $\frac{M'+M}{M'-M}$ (art. 17); d'où il s'enſuit que $\frac{m'+m}{m'-m}$: $\frac{M'+M}{M'-M}$ :: $KS : LS$ :: $Fi : FL$. 2°. Que tang. $y =$ (art. 19) tang. $x \times \frac{m'-m}{m'+m}$; d'où il s'enſuit que $m'+m$: $m'-m$ :: ou $\frac{m'+m}{m'-m}$: 1 :: tang. x : tang. y :: $KS : SV$ :: $Fi : Fn$, en menant Vn parallèle à Ki & FS, c'eſt-à-dire, perpendiculaire à LS. Donc les lignes FL, Fi, Fn ſont entr'elles comme $\frac{M'+M}{M'-M}$, $\frac{m'+m}{m'-m}$, 1.

21. Donc prenant Fn à volonté pour l'unité, $Fi = \frac{m'+m}{m'-m}$, $FL = \frac{M'+M}{M'-M}$, décrivant du diametre Li un cercle qui coupe FK en K, & du diametre Ln un ſecond cercle, & joignant enſuite LK qui coupe le ſecond cercle en V, la ligne FV donnera l'angle $KFV = \zeta$. On trouvera l'angle $KFu = \zeta'$ par une conſtruction ſemblable, en prenant ſur LF prolongée,

$Fn' = Fn$, & décrivant du diametre Ln' un cercle qui coupe LK en u.

22. On voit évidemment que le problême est impossible, si le cercle décrit du diametre Li n'atteint pas la ligne FK; ce qui arrivera si en divisant Li en deux également au point Z, & menant la perpendiculaire ZO à FK, on a $LZ < ZO$, c'est-à-dire, $\frac{LF - Fi}{2} < \text{sin. } 2\alpha \times FZ$. Donc si on a $\frac{R-1}{2} <$ $\text{sin. } 2\alpha \times \left(1 + \frac{R-1}{2}\right)$, ou $\frac{R-1}{R+1} < \text{sin. } 2\alpha$, le problême est impossible.

23. Et comme $R = \frac{M'+M}{M'-M} \times \frac{m'-m}{m'+m}$, on aura $R - 1 = \frac{2Mm' - 2mM'}{(M'-M)(m'+m)}$, & $R + 1 =$ $\frac{2M'm' - 2Mm}{(M'-M)(m'+m)}$, d'où il s'ensuit que le problême sera impossible, si on a $\text{sin. } 2\alpha > \frac{Mm' - M'm}{M'm' - Mm}$, ce qui s'accorde avec l'article 11 ci-dessus.

24. On voit aussi que si le demi-cercle dont il s'agit, atteint la ligne FK, il la coupera en deux points, ou la touchera en un seul, & que dans le premier cas il y aura deux solutions, dans le second, une seule, savoir, lorsque $\text{sin. } 2\alpha = \frac{R-1}{R+1}$.

25. On se souviendra de plus que x ayant deux valeurs (art. 18), y a deux valeurs aussi, correspondantes

à chaque valeur de x, & telles que tang. $y = \frac{(m' - m) \text{ tang. } x}{m' + m}$.

26. Il faut remarquer que les angles ζ & ζ' doivent l'un & l'autre être $< 90^\circ$. Autrement il eſt viſible que, ſi le rayon incident DF étoit ſitué comme dans la Fig. 18, c'eſt-à-dire, dans l'angle EFA, alors le rayon réfracté FL n'arriveroit plus au côté AC, & ſi le rayon incident DF étoit ſitué dans l'angle EFB, le rayon réfracté ſortiroit du priſme, ou tout au plus tomberoit ſur FA, & ne pourroit de nouveau ſe réfracter.

27. Donc puiſque ζ & ζ' ſont néceſſairement l'un & l'autre plus petits que 90°, on aura x, ou $\frac{\zeta + \zeta'}{2} < 90^\circ$.

28. De plus, comme il eſt néceſſaire pour la ſolution que les lignes ou rayons rompus FL, FL' parviennent (Fig. 20) au côté AC du priſme, il eſt clair que $90^\circ - \zeta$ & $90^\circ - \zeta'$, doit être $> 2\alpha$. Donc auſſi $180^\circ - \zeta - \zeta'$, ou $180^\circ - 2x > 4\alpha$.

29. Dans la ſolution générale précédente, nous ſuppoſons que les quantités R ou $\frac{(M' + M)(m' - m)}{(m' + m)(M' - M)}$, $\frac{m + m'}{m' - m}$, $\frac{M' + M}{M' - M}$, ſoient toutes poſitives, c'eſt-à-dire, que M' ſoit $> M$ & $m' > m$. Si $\frac{m + m'}{m' - m}$, ou $\frac{M + M'}{M' - M}$ étoit négative, c'eſt-à-dire, ſi m' étoit $< m$, ou $M' < M$, il faudroit prendre (Fig. 19) Fi ou FL, ſur LF

prolongée vers F, la ligne Fn qui repréſente l'unité reſtant toujours invariable.

30. L'angle FAG du priſme étant ſuppoſé aigu, il eſt aiſé de voir que ſi les valeurs de Fi & FL ſont de différens ſignes, alors le point F ſe trouvera néceſſairement entre les points L & i, & le cercle décrit du diametre Li coupera néceſſairement FK en quelque point, en ſorte qu'il ſera toujours poſſible de réſoudre le problême, c'eſt-à-dire, de déterminer les angles $\mathfrak{C}'$ & $\mathfrak{C}$, par les conditions qui donnent les valeurs de x & de y.

31. Mais outre ces conditions néceſſaires à la ſolution du problême, il en eſt encore d'autres qui doivent encore avoir lieu, & qui réſultent des équations du problême (art. 1, 2 & 3).

32. En effet, puiſque ſin. $k = \frac{\text{ſin. } \mathfrak{C}}{m} = \frac{\text{ſin. } \mathfrak{C}'}{m'}$, il eſt clair que chacune de ces deux dernieres quantités doit être la même, & que de plus elles ne doivent pas être > 1, ſin. k ne pouvant être > 1.

33. Donc ſin. $\mathfrak{C}$ ne doit pas être $> m$, & ſin. $\mathfrak{C}'$ ne doit pas être $> m'$.

34. Il faut de même que chacune des quantités $\frac{1}{M}$ ſin. $(2\alpha + \mathfrak{C})$, & $\frac{1}{M'}$ ſin. $(2\alpha + \mathfrak{C}')$, qui repréſentent les ſinus de la ſeconde réfraction au ſortir du priſme, ne ſoient pas plus grandes que le ſinus total.

35. Il faut même que $\frac{1}{M}$ ſin. $(2\alpha + \zeta)$, & $\frac{1}{M'}$ ſin. $(2\alpha + \zeta')$, ainſi que $\frac{\text{ſin. } \zeta}{m}$ & $\frac{\text{ſin. } \zeta'}{m'}$ ſoient l'un & l'autre < 1; par la raiſon que ſi ces quantités étoient égales à 1, les rayons émergens ou les incidens raſeroient la ſurface du priſme, ce qu'on ne peut ſuppoſer dans l'expérience dont il s'agit.

36. Donc ſin. $(2\alpha + \zeta')$ doit être $< M'$ & ſin. $(2\alpha + \zeta)$ $< M$; & de même ſin. ζ doit être $< m$, & ſin. $\zeta' < m'$.

37. Quand donc on aura trouvé une ſolution qui ſatisfaſſe aux deux équations $\frac{\text{ſin. } \zeta}{m} = \frac{\text{ſin. } \zeta'}{m'}$, & $\frac{\text{ſin. } (2\alpha + \zeta)}{M} = \frac{\text{ſin. } (2\alpha + \zeta')}{M'}$, c'eſt-à-dire, aux équations $\frac{\text{tang. } x}{\text{tang. } (2\alpha + x)} = \frac{1}{R}$, & tang. $y = \frac{\text{tang. } x\, (m' - m)}{m' + m}$, il faudra encore que cette ſolution ſatisfaſſe aux conditions $\frac{\text{ſin. } \zeta}{m} < 1$, $\frac{\text{ſin. } \zeta'}{m'} < 1$, $\frac{\text{ſin. } (2\alpha + \zeta)}{M} < 1$, $\frac{\text{ſin. } (2\alpha + \zeta')}{M'} < 1$.

38. Or ces conditions pourroient n'être pas remplies, quoique les conditions de x & de y le fuſſent. Car dans les valeurs de tang. x & de tang. y, diminuons m' & m proportionnellement, ainſi que M' & M, les valeurs de x & de y reſteront évidemment les mêmes, au lieu que celles de $\frac{\text{ſin. } \zeta}{m}$, $\frac{\text{ſin. } \zeta'}{m'}$, &c. pourront augmenter juſqu'à être > 1.

39. Pour rendre ceci encore plus ſenſible, ſuppoſons (Fig. 20) que DF ſoit le rayon incident, & tirons à volonté les lignes FL, FL', & enſuite $L'I'$, LI parallèles entr'elles. Il eſt clair que ſi m, m', M, M' avoient entr'elles la relation qui répond aux angles rompus GFL, GFL', FLI, $FL'I'$, le problême ſeroit poſſible. Maintenant (les angles $GFL(\beta)$, & $GFL'(\beta')$ demeurant les mêmes) augmentons ou diminuons m & m' proportionnellement, ainſi que M & M', la ſolution pourra ceſſer d'être poſſible, quoiqu'on ait les mêmes valeurs de tang. x & de tang. y.

40. Nous ſuppoſons dans cette ſolution générale $\beta' < \beta$, afin que $\frac{\beta' - \beta}{2}$, ou y ſoit poſitive; de plus nous ſuppoſerons toujours que β ſoit l'angle qui convient aux rayons violets, & β' celui qui convient aux rayons rouges; & comme les rayons violets ſont plus réfrangibles que les rouges, il s'enſuit que pour que β' ſoit plus grand que β, & par conſéquent $m' > m$, il faut que m' & m ſoient l'un & l'autre moindres que l'unité.

41. Donc puiſque les angles d'incidence $2\alpha + \beta'$, $2\alpha + \beta$ ſont & doivent être l'un & l'autre moindres que $90°$, il eſt clair que, β' étant (*hyp.*) $> \beta$, ſin. $(2\alpha + \beta')$ eſt $>$ ſin. $(2\alpha + \beta)$, & que par conſéquent $M' > M$, à cauſe de $\frac{\text{ſin.}(2\alpha + \beta')}{M'} = \frac{\text{ſin.}(2\alpha + \beta)}{M}$.

42. Donc M' & M doivent être plus petits que

l'unité, afin que la réfraction des rayons rouges (auxquels appartient l'angle d'incidence $2\alpha + \zeta'$) en sortant du prisme, soit moindre que celle des rayons violets, auxquels appartient l'angle d'incidence $2\alpha + \zeta$.

43. Tout cela est fondé sur ce que dans le cas où la réfraction se fait en s'approchant de la perpendiculaire, c'est-à-dire, où m & m' sont < 1, le sinus des rayons rouges réfractés doit être plus grand que celui des rayons violets, afin que l'écart soit moindre dans les premiers que dans les seconds. D'où il résulte que $m' > m$. C'est le contraire quand la réfraction se fait en s'éloignant de la perpendiculaire, c'est-à-dire, où $\frac{1}{M}$ & $\frac{1}{M'}$, sont > 1, car alors, & par la même raison, le sinus des rayons rouges réfractés doit être moindre que celui des rayons violets; d'où l'on tire $\frac{1}{M'} < \frac{1}{M}$, & $M' > M$.

44. La supposition que nous avons faite de m & M plus petites que l'unité, ainsi que m' & M', est la plus naturelle pour appliquer les calculs précédens aux expériences du prisme placé dans deux milieux B, C, plus rares que lui, car au passage du milieu B dans le prisme, que nous supposons représenter le milieu A (§. 1, art. 1), m est < 1, ainsi que M, puisque la réfraction du milieu B dans le prisme se fait en s'approchant de la perpendiculaire, & que la réfraction du prisme dans le milieu C se fait en s'en éloignant, ce qui donne $\frac{1}{M} > 1$, & $M < 1$.

45.

45. Nous supposons encore ici que si m est <1, m' sera plus petit que 1, & réciproquement si m est >1, m' sera plus grand que 1; & qu'il en sera de même de M par rapport à M'. Cette supposition est légitime, car si des rayons d'une couleur se brisent en s'approchant ou en s'éloignant de la perpendiculaire, il en sera de même des rayons d'une autre couleur quelconque.

46. Supposant toujours que ζ' soit l'angle qui convient aux rayons rouges, c'est-à-dire, aux rayons les moins réfrangibles, & ζ celui qui convient aux rayons violets, c'est-à-dire, aux plus réfrangibles; il est clair que si m' & m sont plus grands que l'unité, on aura $m' < m$, & par conséquent $\zeta' < \zeta$, à cause de $\frac{\text{sin. } \zeta'}{m'} = \frac{\text{sin. } \zeta}{m}$; & dans ce même cas les rayons rouges qui donnent l'angle $2\alpha + \zeta'$ devant être moins réfractés au sortir du prisme, que les rayons violets, on aura (à cause de $\frac{\text{sin. } (2\alpha + \zeta')}{M'} = \frac{\text{sin. } (2\alpha + \zeta)}{M}$, $M' < M$, & par conséquent M' & $M > 1$.

47. Donc si m' est $\gtrless m$, on aura aussi toujours $M' \gtrless M$, & par conséquent $m' - m$, & $M' - M$ seront toujours de même signe; au moins tant que ζ' & ζ seront positifs.

48. Au contraire, si ζ' & ζ sont négatifs, ce qui

rend néceſſairement k négatif, c'eſt-à-dire, fait tomber le rayon incident DF dans l'angle $EF\beta$, & que m' ainſi que m ſoient < 1, ce qui donne $m' > m$, & $\zeta' > \zeta$, alors $\frac{\text{ſin.}(2\alpha + \zeta')}{M'} = \frac{\text{ſin.}(2\alpha + \zeta)}{M}$, ou plutôt $\frac{\text{ſin.}(2\alpha - \zeta')}{M'} = \frac{\text{ſin.}(2\alpha - \zeta)}{M}$ donnera $M' < M$. Or les rayons rouges qui donnent l'angle d'incidence $2\alpha + \zeta'$, ou plutôt $2\alpha - \zeta'$, devant être moins réfractés que les rayons violets qui donnent l'angle $2\alpha - \zeta$, il faut néceſſairement que M' & M ſoient tous deux > 1.

49. Ce ſera le contraire ſi ζ' eſt $< \zeta$, ce qui donne $m' < m$, m' & $m > 1$, $M' > M$, M' & $M < 1$.

50. On voit auſſi que les angles ζ' & ζ doivent être tous deux de même ſigne, c'eſt-à-dire, tous deux poſitifs ou négatifs, puiſque par les loix de la réfraction, l'un ne ſauroit être d'un côté de la perpendiculaire FG, & l'autre de l'autre côté.

51. Il faut bien remarquer que quand on conclut de $\zeta' \gtrless \zeta$, que m' eſt $\gtrless m$, on ſuppoſe que les angles ζ' & ζ aient le ſigne $+$, ſoit qu'ils tombent (Fig. 18) dans l'angle BFG, ou dans l'angle AFG. Car ſi on ſuppoſoit en général $\zeta' >$ ou $< \zeta$, ſans avoir égard au ſigne, il eſt clair que quand ζ' ſeroit négatif, on auroit (en faiſant $\zeta' = -z'$, & $\zeta = -z$) $-z' \gtrless -z$,

d'où $z' \lesseqgtr z$, & sin. $z' \lesseqgtr$ sin. z', & (à cause de $\frac{\text{sin. } z'}{m'} = \frac{\text{sin. } z}{m'}$), $m' \lesseqgtr m$.

52. Dans le cas où m' est $< m$, & $M' < M$, les lignes *Fi* & *FL* doivent être l'une & l'autre de signe contraire (Fig. 19) à la ligne *Fn* que l'on prend pour l'unité, & le rapport de *Fi* à *FL* doit être celui de $\frac{(m'+m)(M'-M)}{(m'-m)(M'+M)}$ à l'unité, rapport dont la valeur est positive. Ainsi pour appliquer ici plus aisément la construction générale de l'art. 18, il faut prendre l'unité *Fn* négative & *Fn'* positive.

53. Par ce moyen, l'angle ζ' ou *KFu* sera < l'angle ζ ou *KFV*, comme cela doit être dans le cas de $m' < m$ & de $M' < M$ (art. 49).

54. Lorsque ζ' & ζ sont positifs, c'est-à-dire, placés dans l'angle *GFB*, 2α ne sauroit être ni égal, ni $> 90°$, car $90° - \zeta$, & $90° - \zeta'$ ne pourroient être alors $> 2\alpha$, comme cela est nécessaire (art. 28), ce qu'il est aisé de voir d'ailleurs par la simple inspection de la figure; puisque si l'angle *BAC* du prisme étoit droit ou obtus, le rayon rompu *FL* ne pourroit arriver au côté *AC*.

55. On remarquera que x étant positive, & $< 90°$, comme elle le doit toujours être, puisque ζ' & ζ sont chacun plus petits que $90°$, l'angle $2\alpha + x$ ne sauroit être $> 90°$, ni par conséquent tang. $(2\alpha + x)$ négative; car si $2\alpha + x$ ou $2\alpha + \frac{\zeta' + \zeta}{2}$ étoit $> 90°$;

il faudroit qu'au moins un des deux angles ζ', ζ, par exemple, ζ' fût tel que $2\alpha + \zeta'$ fût $> 90°$. Or nous avons vu (art. 28) que cela ne sauroit être.

56. C'est ce qu'on peut encore prouver directement, en considérant que si ζ' & ζ sont positifs, $m' - m$ & $M' - M$ seront de même signe; que par conséquent (art. 52) Fi & FL seront positives l'une & l'autre, & que l'angle LFS formé par FL & par la perpendiculaire FS à LK, sera $< 90°$. Or cet angle $LFS = 2\alpha + x$; donc, &c.

57. En supposant ζ' & ζ négatifs, c'est-à-dire, placés dans l'angle AFG, (& par conséquent le rayon incident DF placé dans l'angle EFB) il peut arriver que ζ' & ζ soient $> 2\alpha$, auquel cas on aura $\zeta' - 2\alpha$, & $\zeta - 2\alpha$, pour les angles d'incidence au-dedans du prisme. Pour lors si ζ' est $> \zeta$, on aura $m' > m$, & m', m chacun plus petits que l'unité; on aura de même (à cause de $\frac{\text{sin.}(\zeta' - 2\alpha)}{M'} = \frac{\text{sin.}(\zeta - 2\alpha)}{M}$) $M' > M$, & à cause que M' appartient aux rayons rouges, c'est-à-dire, aux moins réfrangibles, & M aux violets, c'est-à-dire, aux plus réfrangibles, on aura M' & $M < 1$.

58. Supposons maintenant que ζ' & ζ soient négatifs, & $< 2\alpha$, on aura $\frac{\text{sin.}\,\zeta'}{m'} = \frac{\text{sin.}\,\zeta}{m}$, ou $\frac{\text{tang.}\,x}{\text{tang.}\,y} = \frac{m' + m}{m' - m}$; & $\frac{\text{sin.}(2\alpha - \zeta')}{M'} = \frac{\text{sin.}(2\alpha - \zeta)}{M}$, ou

$$\frac{\text{tang.}\left(2\alpha-\frac{\zeta'-\zeta}{2}\right)}{\text{tang.}\left(\frac{\zeta-\zeta'}{2}\right)}=\left(\frac{\text{tang.}\,x}{\text{tang.}-y}\right)=\frac{M'+M}{M'-M}.$$

59. On fera ſur ce cas des remarques analogues aux précédentes, en ſuppoſant $\zeta' >$, ou $< \zeta$, & on remarquera qu'ici Fi & FL ſont de différens ſignes; c'eſt ſur quoi nous ne nous arrêterons pas davantage.

60. Nous remarquerons ſeulement que dans le cas où les angles d'incidence FLK (Fig. 21) feroient l'un $2\alpha-\zeta$, l'autre $\zeta'-2\alpha$, c'eſt-à-dire, où les deux rayons rompus FL, FL', tomberoient de différens côtés de la perpendiculaire FZ, alors les rayons rompus au ſortir du priſme, feroient néceſſairement divergens, quand même on auroit $\frac{\text{ſin.}\,FLK}{m}=\frac{\text{ſin.}\,FL'K'}{m'}$, parce que les rayons rompus ne tomberoient pas du même côté par rapport à la perpendiculaire; ainſi la ſolution feroit impoſſible réellement, quoiqu'il pût arriver que non-ſeulement les quantités $\frac{\text{ſin.}\,\zeta}{m}$ & $\frac{\text{ſin.}\,\zeta'}{m'}$ fuſſent égales, mais encore les quantités $\frac{1}{M}\,\text{ſin.}\,(2\alpha-\zeta)$ & $\frac{1}{M'}\,\text{ſin.}\,(2\alpha-\zeta')$. Il eſt vrai que ces deux dernieres quantités ſe trouveroient alors de différens ſignes, $2\alpha-\zeta'$ étant négatif (*hyp.*), ce qui indiqueroit ſuffiſamment l'impoſſibilité du paralléliſme des rayons au ſortir du priſme.

61. Si 2α est $=$ ou $> 90°$, alors les angles d'incidence au-dedans du prisme, seront nécessairement $2\alpha - \zeta'$ & $2\alpha - \zeta$; car nous avons vu ci-dessus (art. 54) que dans ce cas les angles ζ' & ζ ne peuvent être placés dans l'angle GFB, mais dans l'angle AFG.

62. Dans le cas où les angles d'incidence sur le côté AG du prisme, sont $2\alpha - \zeta'$ & $2\alpha - \zeta$, l'angle 2α peut être droit ou obtus ; mais il faut alors, pour que les rayons arrivent au côté AG, & par conséquent pour que le problême soit possible, que $90° + \zeta$ & $90° + \zeta'$ soient $> 2\alpha$, comme il est aisé de le voir; donc $2\alpha - \zeta$ & $2\alpha - \zeta'$ doivent être $< 90°$, ainsi que $2\alpha - x$.

63. Donc si l'angle A ou 2α est droit, les rayons parviendront toujours à la surface AG du prisme, puisqu'alors $90° + \zeta'$ & $90 + \zeta$ seront évidemment $> 2\alpha = 90°$. Il n'y auroit d'excepté que le cas de $\zeta' = 0$, & de $\zeta = 0$, qui donneroit $k = 0$, c'est-à-dire, le rayon incident DF perpendiculaire à AF.

64. Enfin, lorsque ζ' & ζ sont négatifs & $> 2\alpha$, on aura les équations $\frac{\text{tang. } x}{\text{tang. } y} = \frac{m + m'}{m' - m}$, & $\frac{\text{tang. } (x - 2\alpha)}{\text{tang. } y} = \frac{M' + M}{M' - M}$; d'où l'on tirera encore une construction analogue à celle des art. 17 & 18.

65. Dans la même hypothèse de ζ' & $\zeta > 2\alpha$, il est clair que si ζ' est $< \zeta$, on aura $m' < m$, $M' < M$, & m', m, ainsi que M' & $M > 1$.

66. Puisque $\frac{\text{tang. }(2\alpha+x)}{\text{tang. }x} = R$, & que $2\alpha+x$, ainsi que x, est toujours $<90°$; il est clair, 1°. que si R est positif & >1, on aura tang. $(2\alpha+x)>$ tang. x. 2°. Que si R est négatif, on aura tang. $(2\alpha+x)$ positive, si x est négatif, & par conséquent $2\alpha>\zeta$ & $>\zeta'$, & que dans ce cas x ne peut être positif, puisqu'alors tang. $(2\alpha+x)$ seroit négative, & $(2\alpha+x)$ $>90°$, ce qui est impossible. 3°. Enfin, que si R est positif & plus petit que l'unité, on aura tang. $(2\alpha+x)<$ tang. x, ce qui donne x négative, & $>2\alpha$, ou ζ & ζ' négatifs, & $>2\alpha$.

67. Donc si R est positif & >1, & que sin. 2α ne soit pas $>\frac{R-1}{R+1}$, on aura la premiere solution, qui donne x positif. Si R est négatif, on aura la seconde solution, qui donne x négatif & $<2\alpha$, & la solution sera toujours possible. Enfin, si R est positif & <1, on aura x négatif & $>2\alpha$, pourvu que sin. 2α ne soit pas $>\frac{1-R}{1+R}$.

68. La condition de R positif, donne $M'>M$ & $m'>m$, ou $M'<M$ & $m'<m$, & celle de $R>$ ou <1 donne $\frac{M+M'}{M'-M} \gtrless \frac{m'+m}{m'-m}$, ou $\frac{M+M'}{M-M'} \gtrless \frac{m'+m}{m-m'}$; donc dans le premier cas $Mm'+M'm'-Mm-M'm \gtrless M'm'+M'm-Mm'-Mm$, ou

$Mm' \gtrless M'm$, c'eſt-à-dire, $\frac{M}{M'} \gtrless \frac{m}{m'}$, & dans le ſecond cas $-Mm' \gtrless -M'm$, ou $\frac{m}{m'} \gtrless \frac{M}{M'}$.

69. Si $\frac{m}{m'} = \frac{M}{M'}$, il eſt aiſé de voir que $\frac{M+M'}{M'-M} = \frac{m+m'}{m'-m}$, qu'ainſi tang. $x =$ tang. $(2\alpha + x)$, que les points i, L ſe confondent, & que le problême (art. 22) eſt impoſſible.

70. En général & dans tous les cas, le point eſſentiel pour la ſolution de ce problême, c'eſt que les rayons FL, FL' (Fig. 21) arrivent à la ſurface AG du priſme; car s'ils y arrivent, on peut aiſément imaginer des loix de réfraction (c'eſt-à-dire, des valeurs de M & M') qui rendront parallèles les rayons émergens LI, $L'I$.

71. L'équation $\frac{\text{tang.}\,(2\alpha+x)}{\text{tang.}\,x} = \frac{1}{R}$, donne non-ſeulement la valeur de x, celle de 2α étant donnée, mais encore la valeur de 2α, x étant ſuppoſée donnée, & cette valeur ſe trouvera par l'équation $\frac{\text{ſin.}\,2\alpha\ \text{coſ.}\,x + \text{ſin.}\,x\ \text{coſ.}\,2\alpha}{\text{coſ.}\,2\alpha\ \text{coſ.}\,x - \text{ſin.}\,x\ \text{ſin.}\,2\alpha} = \frac{\text{tang.}\,x}{R}$, ou (en diviſant le haut & le bas du premier membre par coſ. 2α coſ. x) $\frac{\text{tang.}\,2\alpha + \text{tang.}\,x}{1 - \text{tang.}\,x\ \text{tang.}\,2\alpha} = \frac{\text{tang.}\,x}{R}$; d'où l'on tire aiſément la valeur de tang. 2α.

72. Dans ce cas l'angle $KFS = x$ eſt donné dans

la Fig. 19, & la position de FL est inconnue; pour la trouver, on prendra sur SKL perpendiculaire à FS, la ligne $SL = \frac{SK \times 1}{R}$; & on remarquera de plus que VS doit toujours être à $SK :: m' - m$ est à $m' + m$. D'où l'on connoîtra l'angle $AFP = 2a = KFL$, & la position des deux rayons réfractés FV, Fu.

73. Les solutions précédentes ne sont que pour deux rayons. S'il y en avoit un plus grand nombre, par exemple, trois, & que le rapport des sinus fût m, m', m'', & $\frac{1}{M}$, $\frac{1}{M'}$, $\frac{1}{M''}$, il faudroit alors deux solutions pour chacun des rayons pris deux à deux, & il faudroit de plus que les résultats de ces deux solutions s'accordassent, c'est-à-dire, qu'en nommant x la demi-somme des angles β & β', y leur demi-différence, x' la demi-somme des angles β & β'', & y' leur demi-différence, les quantités $x - y$ & $x' - y'$ qui expriment l'angle β fussent les mêmes de part & d'autre, ainsi que les quantités $x + y$, & $x' + y'$ qui expriment les angles β' & β''.

74. Supposons, pour plus de simplicité, que le rayon incident DF se partage en entrant dans le prisme, en plusieurs rayons de nombre pair, & faisant tous entr'eux des angles égaux, alors il est clair, 1°. que la demi-somme x des deux angles extrêmes β, β', sera aussi celle de deux angles également éloignés des deux

extrêmes; que la demi-différence y doit ſuivre une progreſſion arithmétique, dont le plus grand terme ſera celui qui répond aux deux angles extrêmes. Donc les valeurs de m, m', M, M', doivent être telles pour chaque valeur de x & de y; 1°. que la valeur de x demeure la même; 2°. que les valeurs de y ſoient en progreſſion arithmétique.

75. Suppoſons $M' - M = dM$, & $m' - m = dm$, on aura $\frac{\text{tang.}\, x}{\text{tang.}\,(2u + x)} =$ à très-peu-près $\frac{m\,dM}{M\,dm}$, & tang. $y = \frac{dm\,\text{tang.}\, x}{2m}$. Il faut donc que $\frac{dM}{dm}$ ſoit la même pour chaque paire d'angles.

76. Il faut de plus remarquer qu'on néglige ici le terme qui donneroit $dm\,dM$; & qu'on ſuppoſe tang. $y = y$, à cauſe que y eſt fort petit. Ainſi la ſolution n'eſt qu'approchée; mais elle ſuffit pour notre objet, parce qu'il ne s'agit pas ici d'une préciſion abſolument géométrique. Sur quoi voyez le Tome III de nos *Opuſcules*, pag. 320 & ſuiv.

77. Un Mathématicien qui a traité cette même matiere, m'accuſe d'avoir dit qu'*il étoit néceſſaire* que les quantités dm, dm', dm'', &c. ainſi que dM, dM', dM'' &c. *fuſſent en progreſſion arithmétique*, pour que tous les rayons à-la-fois ſortiſſent parallèles, & pour la parfaite deſtruction des couleurs, tant dans le priſme que dans les lentilles achromatiques; & il obſerve avec raiſon que cette condition *de la progreſſion arithmétique* n'eſt

pas absolument nécessaire. Il a seulement oublié de citer en entier ma proposition, qui exige que les quantités soient en progression arithmétique, *ou* que *les différences* dm, dM, &c. *soient en raison constante.* Voyez l'ouvrage & l'endroit cité, Tom. III de mes *Opusc.* art. 781. Je n'ai donc pas dit que la progression arithmétique fût ici absolument nécessaire, comme le critique l'a supposé.

78. M. Lexell, savant Géomètre de Petersbourg, m'a communiqué une autre construction très-élégante du problême de l'art. 17, construction qu'on peut démontrer en cette sorte; puisque $\frac{\text{tang.}(2\alpha+x)}{\text{tang.}\,x} = R$, on aura donc l'équation $\frac{\text{sin.}(2\alpha+x)\,\text{cos.}\,x}{\text{cos.}(2\alpha+x)\,\text{sin.}\,x} = R$, d'où $\frac{R+1}{R-1} = \text{sin.}(2\alpha+x)\,\text{cos.}\,x + \text{sin.}\,x\,\text{cos.}(2\alpha+x)$: $\text{sin.}(2\alpha+x)\,\text{cos.}\,x - \text{sin.}\,x\,\text{cos.}(2\alpha+x) = \frac{\text{sin.}(2\alpha+2x)}{\text{sin.}\,2\alpha}$. Tout se réduit donc, l'angle $FAL = 2\alpha$ (Fig. 22) étant donné, à faire en sorte que $\frac{FL}{AL} = \frac{R-1}{R+1}$; car il est clair qu'alors l'angle AFL sera $= 2\alpha + 2x$; puisque $\frac{\text{sin.}\,AFL}{\text{sin.}\,FAL} = \frac{AL}{FL}$.

79. Pour trouver la position de FL, telle que $\frac{FL}{AL} = \frac{R-1}{R+1}$, il n'y a qu'à tracer d'un point L quelconque

de la ligne AL comme centre, un arc de cercle du rayon $\frac{AL \times (R-1)}{R+1}$; lequel coupera la ligne AFZ en quelque point F.

80. On voit clairement que si le problême est possible, le cercle décrit du rayon LF coupera la ligne AF en deux points F, F, ou du moins la touchera quand ces deux points se réuniront; il est clair aussi que le problême sera impossible, si on a $\frac{(R+1)^2 \text{ sin. } 2\alpha^2}{(R-1)^2} > 1$; puisqu'alors sin. $(2\alpha + 2x)^2$ seroit > 1, & que d'ailleurs LF qui est $= \frac{AL(R-1)}{R+1}$ seroit $< LR = AL$ sin. 2α, d'où il est évident que l'arc décrit du rayon $\frac{AL(R-1)}{R+1}$ ne pourroit couper la ligne AZ.

81. Dans le cas où $\frac{(R+1)^2}{(R-1)^2}$ sin. $2\alpha^2 = 1$, alors les points F, F se confondent, & le cercle décrit touche la ligne AF.

82. Puisque $R =$ (art. 17) $\frac{(M'+M)(m'-m)}{(M'-M)(m'+m)}$, il est aisé de voir que $R - 1 = 2Mm' - 2M'm$ & $R + 1 = 2M'm' - 2Mm$, d'où la condition de sin. $2\alpha^2 > \frac{(R-1)^2}{(R+1)^2}$ est la même que celle de l'art. 11.

83. Comme tout sinus répond à deux angles complémens l'un de l'autre à 180°, il est clair que pour

chacun des deux points F, on aura deux valeurs de $2a + 2x$, complémens l'une de l'autre à 180°, c'est-à-dire, AFL & QFL; il semble donc d'abord qu'il y auroit quatre solutions, mais il est aisé de voir que ces quatre solutions se réduisent à deux, puisque l'angle obtus AFL est $=$ à l'angle obtus QFL, & l'angle aigu $AFL =$ à l'angle aigu QFL.

84. Si on fait $LO = FL$, & qu'on tire FO, & de plus FG perpendiculaire à AF, il est aisé de voir que l'angle $GFO = x$; car à cause de $LF = LO$, on a $LFO = 90^\circ - \frac{FLO}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2} - \frac{AFL}{2}$ $= 90^\circ - \frac{2a}{2} - \frac{2a - 2x}{2}$; donc ajoutant ou ôtant l'angle $GFL = 2a + 2x - 90^\circ$, ou $90^\circ - 2a - 2x$, on aura l'angle $GFO = x$.

85. Pour trouver les angles ζ & ζ', il faut mener à volonté GK perpendiculaire (Fig. 23) à FO, (on fera de même pour l'autre ligne fo) & prendre $KV = ku$, & telles que $KV = \frac{GK \times (m' - m)}{m' + m}$. Mais notre solution de l'art. 20 paroît un peu plus simple, en ce qu'elle donne tout de suite, & par une seule construction, les angles ζ' & ζ, sans avoir besoin de l'angle x, & que de plus elle donne aussi ce même angle x très-aisément (art. 18).

86. Puisque sin. $(2a + 2x) = \frac{\text{sin. } 2a(R + 1)}{R - 1} =$

$\frac{M'm' - Mm}{Mm' - M'm} \times$ fin. 2α; il eft clair que x étant fuppofée pofitive; c'eft-à-dire, ζ' & ζ pofitifs, $M'm' - Mm$ ne fauroit être $= Mm' - M'm$; en effet, il faudroit pour cela que $(M' - M)m'$ fût $= (M - M')m$, ce qui donneroit $M' = M$, fuppofition illufoire. On voit auffi que $R - 1 = R + 1$ (ce qui eft la même chofe que $Mm' - M'm = M'm' - Mm$) donneroit $R = \infty$, & par conféquent $M' - M = 0$, ou $M' = M$.

87. Dans le cas de fin. $2\alpha = 1$, x étant pofitive, le problême eft impoffible, car foit que R foit $>$ ou < 1, $\frac{R+1}{R-1}$ eft une quantité pofitive ou négative $>$ que l'unité, ainfi $\frac{\text{fin. } 2\alpha \times (R+1)}{R-1}$ eft toujours $>$ l'unité pofitive ou négative; donc la valeur de fin. $(2\alpha + 2x)$ eft illufoire. On remarquera que dans le cas de x pofitive, R eft toujours pofitif (art. 67).

88. Si $Mm' - M'm = 0$, ce qui donne ou $M = M'$, & $m' = m$, fuppofition illufoire, ou $\frac{M}{M'} = \frac{m}{m'}$, on aura fin. $2\alpha + 2x = \infty$, & par conféquent le problême impoffible. Toutes ces conféquences peuvent auffi fe déduire aifément de notre folution.

89. Si l'on veut que le rayon émergent foit parallèle à l'incident, il eft aifé de voir que l'angle de réfraction à la fortie du prifme doit être $= 2\alpha + k$, &

qu'ainsi on aura $\frac{\text{sin.}(2\alpha+\zeta)}{M} = \text{sin.}(2\alpha+k)$, donc $\frac{(\text{sin.}\,2\alpha+\zeta)+\text{sin.}(2\alpha+k)}{\text{sin.}(2\alpha+\zeta)-\text{sin.}(2\alpha+k)} = \frac{M+1}{M-1}$; ou $\frac{\text{tang.}\left(2\alpha+\frac{\zeta+k}{2}\right)}{\text{tang.}\left(\frac{\zeta-k}{2}\right)} = \frac{M+1}{M-1}$. On a aussi sin. $k =$ $\frac{\text{sin.}\,\zeta}{m}$; d'où $\frac{\text{sin.}\,\zeta+\text{sin.}\,k}{\text{sin.}\,\zeta-\text{sin.}\,k} = \frac{m+1}{m-1}$, ou $\frac{\text{tang.}\left(\frac{\zeta+k}{2}\right)}{\text{tang.}\left(\frac{\zeta-k}{2}\right)}$ $= \frac{m+1}{m-1}$. Donc $\frac{\text{tang.}\left(\frac{\zeta+k}{2}\right)}{\text{tang.}\left(2\alpha+\frac{\zeta+k}{2}\right)} = \frac{(m+1)(M-1)}{(m-1)(M+1)}$. Soit $\frac{\zeta+k}{2} = z$, on aura $\frac{\text{tang.}\,z}{\text{tang.}(2\alpha+z)} =$ $\frac{(m+1)(M-1)}{(m-1)(M+1)}$; & en faisant le second membre $=$ $\frac{1}{R'}$, on aura une construction tout-à-fait semblable à celle de l'article 18, en prenant $Fn = 1$, $Fi =$ $\frac{m+1}{m-1}$, $FL = \frac{M+1}{M-1}$.

90. L'équation $\frac{1}{M}$ sin. $(2\alpha+\zeta) = \frac{1}{M'}$ sin. $(2\alpha+\zeta)$ pour le parallélisme des rayons émergens, & l'équation $\frac{1}{M}$ sin. $(2\alpha+\zeta) =$ sin. $(2\alpha+k)$, pour le parallélisme du rayon émergent à l'incident, donnent deux valeurs de tang. 2α,

savoir, tang. $2\alpha = \dfrac{\dfrac{\text{sin. } \beta'}{M'} - \dfrac{\text{sin. } \beta}{M}}{\dfrac{\text{cos. } \beta}{M} - \dfrac{\text{cos. } \beta'}{M'}}$, & tang. $2\alpha = \dfrac{\text{sin. } k - \dfrac{\text{sin. } \beta}{M}}{\dfrac{\text{cos. } \beta}{M} - \text{cos. } k}$. D'où l'on tire, en réduisant & mettant pour sin. β' & sin. β leurs valeurs m' sin. k & m sin. k, l'équation $\left(\dfrac{\text{cos. } \beta}{M} - \dfrac{\text{cos. } \beta'}{M'}\right)\left(1 - \dfrac{m}{M}\right) = \left(\dfrac{\text{cos. } \beta}{M} - \text{cos. } k\right)\left(\dfrac{m'}{M'} - \dfrac{m}{M}\right)$, ou $\dfrac{\text{cos. } \beta}{M}\left(1 - \dfrac{m'}{M'}\right) - \dfrac{\text{cos. } \beta'}{M'}\left(1 - \dfrac{m}{M}\right) + \text{cos. } k\left(\dfrac{m'}{M'} - \dfrac{m}{M}\right) = 0$.

91. On a de plus sin. $\beta = m$ sin. k, & sin. $\beta' = m'$ sin. k; donc si on fait sin. $k = x$, sin. $\beta = y$, sin. $\beta' = z$, on aura $\dfrac{\sqrt{(1 - m^2 x^2)}}{M}\left(1 - \dfrac{m'}{M'}\right) - \dfrac{\sqrt{(1 - m'^2 x^2)}}{M'}\left(1 - \dfrac{m}{M}\right) + \sqrt{(1 - xx)}\left(\dfrac{m'}{M'} - \dfrac{m}{M}\right) = 0$.

92. Donc supposant $xx = u$, & faisant disparoître les radicaux, on aura une équation du second degré qui donnera la valeur de u, & qui sera l'équation de condition pour le double parallélisme; d'où l'on voit que, la loi de réfraction étant donnée, l'angle 2α du prisme doit avoir nécessairement une certaine valeur, pour que les deux parallélismes aient lieu à-la-fois;

fois ; encore pourroit-il se faire que cette valeur de 2α fût impossible, si sin. 2α se trouvoit imaginaire, ou négatif, ou $= 0$, ou > 1 ; ce qui dépend des valeurs de m, m', M & M'.

93. On peut mettre l'équation précédente sous cette forme plus commode,

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{M^2}-\frac{m^2x^2}{M^2}\right)}}{1-\frac{m}{M}}-\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{M'^2}-\frac{m'^2x^2}{M'^2}\right)}}{1-\frac{m'}{M'}}+\frac{\sqrt{(1-xx)}\left(\frac{m'}{M'}-\frac{m}{M}\right)}{\left(1-\frac{m}{M}\right)\left(1-\frac{m'}{M'}\right)}=0,$$

ou

$$\frac{\sqrt{(1-m^2x^2)}}{M-m}-\frac{\sqrt{(1-m'^2x^2)}}{M'-m'}+\frac{\sqrt{(1-xx)}\left(\frac{m'}{M'}-\frac{m}{M}\right)}{\left(1-\frac{m}{M}\right)\left(1-\frac{m'}{M'}\right)}=0.$$

94. Et si on suppose $m'=m+dm$, $M'=M+dM$, on aura

$$\frac{\sqrt{(1-xx)}\,d\left(\frac{m}{M}\right)}{\left(1-\frac{m}{M}\right)^2}=d\left(\frac{\sqrt{(1-m^2x^2)}}{M-m}\right);$$

ce qui donne en réduisant, $(Mdm-mdM)\sqrt{(1-xx)}=$

$$(M-m)\times -mdm.\frac{xx}{\sqrt{(1-m^2x^2)}}+(dm-dM)\sqrt{(1-m^2x^2)}.$$

En faisant $xx=y$, & faisant évanouir les radicaux, on aura une équation qui sera la même que la résultante de celle que nous avons déja donnée pour ce

même objet dans le Tom. VI de nos *Opusc.* pag. 265, art. 13.

95. On peut simplifier cette équation en faisant $\frac{1}{x^2}=uu$, ce qui donnera $(Mdm-mdM)\sqrt{(uu-1)}$ $=\frac{(M-m)x-mdm}{\sqrt{(u^2-m^2)}}+(dm-dM)\sqrt{(u^2-m^2)}$, ou $(Mdm-mdM)\sqrt{(u^2-1)}.\sqrt{(u^2-m^2)}=-Mmdm+m^2dM+u^2dm-u^2dM$, & en quarrant & réduisant $(u^4-u^2-m^2u^2)(Mdm-mdM)^2=2u^2(dm-dM)\times(-Mmdm+m^2dM)+u^4(dm-dM)^2$; donc $(u^2-1-m^2)(Mdm-mdm)^2=(2dM-2dm)(Mmdm-m^2dM)+u^2(dm-dM)^2$; & $u^2\times[(Mdm-mdM)^2-(dm-dM)^2]=(1+m^2)(Mdm-mdM)^2+(2dM-2dm)(Mmdm-m^2dM)$; supposant donc $m-M=\omega$, & $\frac{m}{M}=\delta$, on aura $u^2(M^4d\delta^2-d\omega^2)=M^4(1+m^2)d\delta^2-2md\omega d\delta.M^2$ $=M^4d\delta^2+(M^2md\delta-d\omega)^2-d\omega^2$; ou $(u^2-1)(M^4d\delta^2-d\omega^2)=M^2md\delta-d\omega)^2$; donc à cause de $u^2-1=\frac{1-xx}{xx}=(\text{cot.}\,k)^2$, on aura $\text{cot.}\,k=\frac{M^2md\delta-d\omega}{\pm\sqrt{(M^4d\delta^2-d\omega^2)}}$, & $\text{tang.}\,k=\frac{\pm\sqrt{(M^4d\delta^2-d\omega^2)}}{M^2md\delta-d\omega}$; quantité dans laquelle on peut mettre encore $M\delta$ au lieu de m, & $\frac{\omega}{\delta-1}$ au lieu de M; ce qui donne une solution assez simple du problême, lorsque le problême pourra en effet se résoudre, c'est-à-dire, lorsque les

conditions de l'art. 32 & suiv. seront observées. Nous ne croyons pas néceſſaire d'entrer là-deſſus dans un plus grand détail. Nous obſerverons ſeulement que ſi la valeur de tang. 2α, déduite de l'art. 90 eſt ici négative, il eſt néceſſaire auſſi que k ſoit négatif, c'eſt-à-dire, que le rayon incident DF tombe dans l'angle EFB, puiſqu'en écrivant -2α au lieu de 2α, l'angle FLK eſt alors $=\zeta - 2\alpha$, au lieu de $\zeta + 2\alpha$.

96. Il eſt remarquable que ſi x eſt très-petite, les termes où eſt xx s'évanouiront, & le double parallélisme ne pourra avoir lieu ſans une équation entre m, dm, M, dM, ſavoir, $Mdm - mdM = dm - dM$, ou $\frac{dM}{M-1} = \frac{dm}{m-1}$, ce qui s'accorde encore avec le Tom. VI de nos *Opuſc.* pag. 283.

97. Au lieu de chercher l'angle 2α par les valeurs données de m, m', M, M', il ſeroit plus ſimple de chercher quelles doivent être les valeurs de m, m', M, M', celles de 2α & de k étant ſuppoſées données, pour ſatisfaire ou à l'un des deux parallélismes, ou aux deux à-la-fois; on aura pour cela les deux équations $\frac{\text{ſin.}(2\alpha+\zeta)}{\text{ſin.}(2\alpha+\zeta')} = \frac{M}{M'}$ pour le parallélisme des rayons émergens entr'eux, $\frac{\text{ſin.}(2\alpha+\zeta)}{M} = \text{ſin.}(2\alpha+k)$ pour celui du rayon émergent au rayon incident.

98. De-là on tire les valeurs de M & de M', les valeurs de m & de m' étant d'ailleurs ce qu'on voudra,

& il eſt clair, 1°. que ſi on veut ſatisfaire au ſeul parallélisme d'un des rayons émergens avec l'incident, il ſuffira de trouver M, par l'équation $\frac{\text{ſin.}(2\alpha+\zeta)}{\text{ſin.}(2\alpha+k)}=M$, M' étant d'ailleurs ce qu'on voudra. 2°. Que ſi on veut ſatisfaire au ſeul parallélisme des rayons émergens, il ſuffira de ſuppoſer le rapport de M à $M'=\frac{\text{ſin.}(2\alpha+\zeta)}{\text{ſin.}(2\alpha+\zeta')}$, M & M' étant d'ailleurs ce qu'on voudra, pourvu qu'ils ſatisfaſſent à ce rapport.

3°. Enfin que pour ſatisfaire aux deux parallélismes à-la-fois, il faut avoir $M=\frac{\text{ſin.}(2\alpha+\zeta)}{\text{ſin.}(2\alpha+k)}$, & $M'=\frac{M\,\text{ſin.}(2\alpha+\zeta')}{\text{ſin.}(2\alpha+\zeta)}=\frac{\text{ſin.}(2\alpha+\zeta')}{\text{ſin.}(2\alpha+k)}$.

99. Mais cette méthode de déterminer M, M', m & m' par l'angle 2α du priſme, a l'inconvénient que les quantités M, M', &c. étant données par l'expérience, ne dépendent point, comme l'angle 2α, de la volonté de l'obſervateur. Au reſte, il demeure conſtant par toute cette théorie, que la prétendue expérience de Newton, ſur le double parallélisme des rayons émergens entr'eux & avec l'incident, eſt au moins très-douteuſe, & qu'ainſi M. Klingenſtierna n'ayant appuyé que ſur cette expérience ſuppoſée, la fauſſeté de la loi de réfraction avancée par Newton, la fauſſeté de cette loi reſtoit encore à prouver, comme nous l'avons déjà montré dans le §. I de ce Mémoire.

100. Ayant trouvé par les méthodes précédentes

quelle doit être la direction du rayon DF, soit dans l'angle EFA, soit dans l'angle EFB, pour que les rayons émergens soient parallèles entr'eux; si l'on joint au prisme FAC un autre prisme, dont une des faces soit coincidente avec AB, & dans lequel le rayon DF entre perpendiculairement, il est clair que la réfraction se fera dans ce double prisme, comme dans le prisme simple BAC.

101. En général, s'il y a deux prismes, & que les rapports de réfraction en sortant du second prisme, soient $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\mu'}$, on aura, pour le parallélisme des rayons émergens, les équations $\sin. \zeta = m \sin. k$; $\sin. \zeta' = m' \sin. k$; $\frac{1}{M} \sin. (2\alpha + \zeta) = \sin. k$; $\frac{1}{M'} \sin. (2\alpha + \zeta') = \sin. k'$; $\frac{1}{\mu} \sin. (2\alpha' + k) = \frac{1}{\mu'} \sin. (2\alpha' + k')$.

102. Donc faisant $\zeta' = \frac{x+y}{2}$, $\zeta = \frac{x-y}{2}$, $K' = \frac{z+u}{2}$, $K = \frac{z-u}{2}$, on aura

1°. $\frac{\text{tang. } x}{\text{tang. } y} = \frac{m+m'}{m'-m}$;

2°. $\sin. (2\alpha + x) \cos. y = \frac{M+M'}{2} \sin. z \cos. u + \frac{M'-M}{2} \times \sin. u \cos. z$;

3°. $\sin. y \cos. (2\alpha + x) = \frac{M+M'}{2} \sin. u \cos. z + \frac{M'-M}{2} \times \sin. z \cos. u$;

4°. $\frac{\text{tang.}(2\alpha'+z)}{\text{tang.}\,u} = \frac{\mu'+\mu}{\mu'-\mu}$.

La seconde & la troisiéme équation donnent, en les divisant l'une par l'autre, $\frac{\text{tang.}(2\alpha+x)}{\text{tang.}\,y} = \frac{(M+M')\,\text{tang.}\,z+(M'-M)\,\text{tang.}\,u}{(M+M')\,\text{tang.}\,u+(M'-M)\,\text{tang.}\,z}$.

103. Soit $M'=M+dM$, $m'=m+dm$, dM & dm étant très-petits, on aura y & u très-petits, d'où l'on tire les équations approchées,

1°. $\frac{\text{tang.}(2\alpha+x)}{\text{tang.}\,x} = \frac{dm}{2m} \times \frac{2M\,\text{tang.}\,z}{2M\,\text{tang.}\,u+dM\,\text{tang.}\,x}$;

2°. $\text{sin.}(2\alpha+x) = M\,\text{sin.}\,z$.

3°. $\frac{\text{tang.}(2\alpha'+z)}{\text{tang.}\,u} = \frac{\mu'+\mu}{\mu'-\mu} = \frac{2\mu}{d\mu}$;

Or $\text{tang.}(2\alpha'+z) = (\text{sin.}\,2\alpha'\,\text{cos.}\,z+\text{sin.}\,z\,\text{cos.}\,2\alpha') : (\text{cos.}\,2\alpha'\,\text{cos.}\,z-\text{sin.}\,z\,\text{sin.}\,2\alpha') =$ (en divisant le numérateur & le dénominateur par $\text{cos.}\,2\alpha\,\text{cos.}\,z$) $\frac{\text{tang.}\,2\alpha'+\text{tang.}\,z}{1-\text{tang.}\,z\,\text{tang.}\,2\alpha'}$.

104. D'où l'on tire, à cause de $\text{tang.}\,z = \frac{\text{sin.}\,z}{\text{cos.}\,z} = \frac{\text{sin.}(2\alpha+x)}{\sqrt{(M^2-\text{sin.}(2\alpha+x)^2}}$, & de $\text{tang.}\,u = \frac{d\mu}{2\mu} \times (\text{sin.}\,2\alpha'\,\text{cos.}\,z+\text{sin.}\,z\,\text{cos.}\,2\alpha') : (\text{cos.}\,2\alpha'\,\text{cos.}\,z-\text{sin.}\,z\,\text{sin.}\,2\alpha') = \frac{d\mu}{2\mu}(\text{tang.}\,2\alpha'+\text{tang.}\,z) : (1-\text{tang.}\,z\,\text{tang.}\,2\alpha')$, une équation finale en x; ce qui n'a pas besoin d'être expliqué davantage.

105. Au lieu de prendre x pour inconnue, on pourroit prendre z, & considérer que $\frac{\text{tang.}(2\alpha+x)}{\text{tang.}\,x} = \frac{\text{tang.}(2\alpha+x)}{\text{tang.}(2\alpha+x-2\alpha)} = \frac{\text{sin.}(2\alpha+x)}{\text{cos.}(2\alpha+x)\frac{\text{sin.}(2\alpha+x-2\alpha)}{\text{cos.}\,2\alpha+x-2\alpha}} =$ $[(\text{sin.}\,2\alpha+x)(\text{cos.}(2\alpha+x)\text{cos.}\,2\alpha)+\text{sin.}(2\alpha+x)(\text{sin.}(2\alpha+x)\,\text{sin.}\,2\alpha)]:[\text{sin.}(2\alpha+x)\,\text{cos.}(2\alpha+x)\,\text{cos.}\,2\alpha-\text{cos.}(2\alpha+x)\,\text{cos.}(2\alpha+x)\,\text{sin.}\,2\alpha]$. On mettra dans cette quantité au lieu de $\text{sin.}(2\alpha+x)$ & de $\text{cos.}(2\alpha+x)$, leurs valeurs $M\,\text{sin.}\,z$ & $\sqrt{(1-M^2\,\text{sin.}\,z^2)}$, & au lieu de $\text{tang.}\,z$ dans l'autre membre de l'équation, sa valeur $\frac{\text{sin.}\,z}{\sqrt{(1-\text{sin.}\,z^2)}}$, & on aura une équation en $\text{sin.}\,z$.

106. S'il étoit question de rendre le rayon émergent parallèle à l'incident, on auroit des équations semblables, en mettant μ au lieu de μ', & 1 au lieu de μ. Mais en voilà assez sur l'objet de ces recherches, que les Géomètres pourront aisément pousser plus loin, s'ils le jugent à propos.



§. III.

Sur les couleurs qui se forment au foyer des Lentilles, & sur les dimensions de ce foyer.

1. Soit *CD* une lentille (Fig. 24), *ABR* le rayon qui passe par l'axe, & que je nomme *rayon central*, *R* le foyer des rayons rouges infiniment proches de l'axe, *V* celui des rayons violets, *RL* l'aberration de sphéricité des rayons rouges, *VL'*, celle des rayons violets.

2. Je supposerai pour plus de simplicité $VL' = RL$, ces deux quantités étant en effet très-peu différentes l'une de l'autre ; il seroit cependant facile d'avoir égard à leur différence, si on le jugeoit nécessaire.

3. Cela posé, il est clair, 1°. qu'il y aura du rouge dans tous les points de l'espace *RL*, & du violet dans tous les points de l'espace *VL'*. 2°. Que depuis *R* jusqu'en *V*, on aura le foyer de tous les rayons infiniment proches de l'axe, depuis le rouge jusqu'au violet, en procédant par degrés insensibles. 3°. Que le foyer total occupera en longueur sur l'axe, l'espace *RL'*. 4°. Qu'en *R* il n'y aura que du rouge, & en *L'* que du violet. 5°. Que si on prend un point *r* entre *R* & *L*, la couleur en *r* sera formée de la couleur dont le foyer

foyer est en r, plus de la couleur rouge qui s'étend jusqu'en L, plus de toutes les couleurs entre R & r, qui s'étendent jusqu'à la limite l, en prenant $rl = RL$.

4. Distinguons maintenant trois cas, celui où le point L tombe en V, celui où il tombe au-dessous, & celui où il tombe au-dessus.

5. Dans le premier cas, où les points V, L (Fig. 25) se confondent, il y a en L du rouge & du violet, & par conséquent aussi toutes les autres couleurs intermédiaires, & la lumiere en V ou L est blanche, en r, entre R & L, il y aura une couleur formée de toutes les couleurs dont les foyers sont entre R & r; & en Z, entre V & L', si on fait $ZZ' = RV = VL'$, il y aura une couleur formée du mêlange de toutes celles qui sont entre Z' & V, puisque par l'aberration de sphéricité, ces couleurs se trouvent dans la ligne $Z'Z$.

6. Dans le second cas où L est au-dessous de V, 1°. si on prend (Fig. 26) $Rr < RL$, la couleur en r sera formée de toutes les couleurs dont les foyers sont entre R & r, & la couleur en L, de toutes les couleurs dont les foyers sont entre R & L; 2°. si on prend un point i entre L & V, la couleur en i (faisant $ir' = RL$) sera formée de toutes les couleurs qui sont depuis r' jusqu'à i. 3°. Enfin, si on prend un point Z entre V & L', alors faisant $Zi' = RL = VL'$, la couleur en Z sera formée de toutes les couleurs qui sont entre i' & V.

7. Dans le troisiéme cas où *L* est au-dessus de *V*, (Fig. 27) on verra de même, 1°. que la couleur en *r* entre *R* & *V* sera formée de toutes les couleurs dont les foyers sont entre *R* & *r*. 2°. Qu'en *V*, elle sera blanche & formée de toutes les couleurs. 3°. Que depuis *V* jusqu'en *L*, elle sera encore blanche partout, & formée de toutes les couleurs. 4°. Qu'en *Z* entre *L* & *L'*, si on fait $ZZ' = RL = VL'$, la couleur sera formée de toutes les couleurs dont les foyers sont entre *Z'* & *V*.

8. De-là il résulte que dans le premier cas (Fig. 25) il n'y a de blanc qu'au seul point *V* ou *L*; que dans le second (Fig. 26), il n'y a de blanc en aucun endroit de *RL*, & que les couleurs les plus fortes seront dans l'espace *VL*, comme étant formées d'un plus grand nombre de couleurs réunies, & que dans le troisiéme cas il y a (Fig. 27) du blanc dans tout l'espace *VL*.

9. De plus, dans le second cas, si on fait $VO = RL$, & que *O* soit entre *R* & *L* (Fig. 28), il est visible que le point *L* renfermant toutes les couleurs qui sont depuis *R* jusqu'en *L*, & le point *V* toutes celles qui sont depuis *V* jusqu'en *O*, toutes les couleurs qui sont entre *L* & *O*, se trouveront en *L* & en *V*, & par conséquent aussi dans tous les points de *LV*. Si le point *O* tombe en *L*, il n'y aura que la seule couleur *L* qui se trouve dans tous les points de *LV*, & si $RO > RL$, il n'y aura aucune couleur qui

fe trouve à-la-fois dans tous les points de LV.

10. Il y a un peu plus de difficulté à déterminer le mêlange des couleurs dans l'aberration latitudinale, & la plus petite image qui en réfulte. Nous fuppoferons pour plus de facilité que les rayons tombent tous fur la lentille parallèlement à l'axe, & nous remarquerons d'abord qu'en conféquence des formules données (Tome III de nos *Opufcules*, pag. 79, art. 185) nous aurons

$$\frac{1}{\delta} = \frac{2(P-1)}{r} + \frac{\zeta^2}{r^3}\left(\frac{P-1}{P}\right)(2-P+4P^3-4P^2);$$

d'où on a $\delta =$ à très-peu près $\frac{r}{2(P-1)} - \frac{\zeta^2}{r^3} \times \frac{r^2}{4(P-1)^2} \times \frac{P-1}{P}(2-P+4P^3-4P^2)$. Prenant donc P pour la quantité qui convient aux rayons moyens, en forte que $P+dP$ foit celle qui convient aux rayons violets, & $P-dP$ celle qui convient aux rayons rouges, l'aberration de réfrangibilité fera pour les rayons violets $-\frac{rdP}{2(P-1)^2}$, & pour les rouges $+\frac{rdP}{2(P-1)^2}$, en forte que le foyer V des rayons violets fera plus près de la lèntille que le foyer R des rayons rouges; de plus, l'aberration de fphéricité pour tous les rayons fera négative, parce que P eft >1 & $P<2$, ce qui rend $2-P+4P^3-4P^2$ pofitif, & l'aberration de fphéricité $-\frac{\zeta^2 r^2}{r^3 . 4(P-1)} \times \frac{P-1}{P} \times (2-P+$

$4P^3 - 4P^2$) négative ; donc L & L' (Fig. 25, 26, 27) seront au-dessus de R & de V.

11. Soient maintenant RA, RB (Fig. 29) les caustiques des rayons rouges, Va, Vb celles des rayons violets que je supposerai les mêmes que celles des rayons rouges, d'autant que la différence en est très-petite. Soient de plus C, D, c, d, les points où les caustiques sont touchées par les rayons extrêmes venans de C' & de D'; il est aisé de voir, 1°. qu'au-dessus de CD vers B (& on en dira de même de cd) tous les rayons rouges réfractés tombent entre les deux extrêmes qui touchent la caustique en C & en D; d'où il s'ensuit qu'en CD & au-dessus, comme en ir, l'image *rouge* est CD ou ir, c'est-à-dire, renfermée entre les rayons rouges extrêmes cr, Di, qui touchent la caustique en C & en D. 2°. Qu'au-dessous de CD, & jusqu'en ML, où les rayons touchans (Fig. 30) Cr, Di prolongés rencontrent les caustiques, l'image en HG, par exemple, sera terminée par les deux caustiques. 3°. Enfin, qu'au-dessous de ML, par exemple, en $M'L'$, l'image sera terminée en M', L' par les rayons $iDNLL'$, $rCNMM'$.

12. D'où il résulte, ce qui peut d'ailleurs être prouvé de beaucoup d'autres manieres, que la plus petite de toutes les images rouges, & par conséquent le vrai foyer latitudinal des rayons rouges sera ML.

13. On trouvera de même l'image ml (Fig. 31) formée par les rayons violets, & on voit qu'en général

l'image formée par des rayons rouges quelconques, eſt déterminée par les deux points où les rayons extrêmes de cette couleur coupent la cauſtique de l'autre côté de l'axe.

14. Ainſi, on voit en général que pour une couleur quelconque (Fig. 32), l'image, ou plutôt les différentes images *KQ* d'un côté de l'axe (& il en ſera de même de l'autre côté) ſeront renfermées dans la ligne mixte, *rCLQZ*, compoſée, 1°. de la tangente *rC* au point extrême *C* de la cauſtique, formée par les rayons de cette couleur; 2°. de la portion *CL* de la même cauſtique, juſqu'au point *L* où eſt la plus petite image, formée par le rayon extrême qui venant de l'autre côté de l'axe, coupe la cauſtique *CL* en *L*; 3°. enfin de la droite *LZ*, qui eſt le prolongement de ce rayon coupant.

15. Cette ligne mixte ſera à très-peu près la même pour tous les rayons, depuis le rouge juſqu'au violet, & elle ne ſera ſeulement que changer de poſition parallèlement à l'axe *AR*, ſa diſtance à cet axe demeurant d'ailleurs la même.

16. Soient donc *rCLZ*, *r'c'L'Z'* (Fig. 33) les deux limites des images pour les rayons rouges & les violets; il eſt clair, 1°. que l'image *ON* formée au point d'interſection *N* de ces deux limites ou lignes mixtes, ſera celle qui réſulte des rayons rouges & violets, puiſqu'elle ſera la plus petite de toutes les images *KQQ* ou *KQ'Q* que forment ces rayons réunis. 2°. Que comme la li-

mite *rCNLZ* des rayons rouges eſt extérieure à toutes les autres, les rayons rouges étant les moins réfrangibles, chaque image *KQ'Q* terminée à la limite des rayons rouges, renfermera toutes les images des autres rayons; & que de plus *ON* ſera la moindre des images formées par tous les rayons pris enſemble; & que par conſéquent *ON* ſera l'image ou le vrai foyer de la lentille.

17. Au reſte, cette image *ON* ne ſera pas blanche dans toute ſon étendue. Pour en déterminer la couleur, ſoit priſe ſur la ligne *ON* (Fig. 34) la partie $OH = ML = M'L'$, c'eſt-à-dire, = à la plus petite image formée par les rayons d'une ſeule couleur. Imaginons enſuite la cauſtique, intermédiaire entre les deux extrêmes, qui paſſe par *H*, c'eſt-à-dire, qui donne en *O* ſa plus petite image, égale à *ML* ou *M' L'*; il eſt aiſé de voir, 1°. que depuis *O* juſqu'en *H*, il y aura des rayons de toute couleur, & qu'ainſi la partie *OH* ſera blanche. 2°. Que ſi on appelle ρ la couleur qui forme la cauſtique paſſant par *H*, cette couleur ρ ne ſe trouvera plus dans l'eſpace *HN*. 3°. Que ſi on appelle ρ' la couleur qui forme la limite ou ligne mixte paſſant par un point *h* de *HN*, cette couleur ρ' ne ſe trouvera plus dans l'eſpace *hN*. Or comme il y a deux limites, celle du rouge & du violet, c'eſt-à-dire, des deux couleurs extrêmes qui paſſent par *N*; il y aura de même en *h* deux couleurs ρ', ρ'', l'une plus proche du violet, l'autre plus proche du rouge, & il

n'y aura que le point H où il ne paſſera qu'une ſeule limite ou ligne mixte. Soit ρ' la couleur la plus proche du violet ou la plus réfrangible, & ρ'' la plus proche du rouge ou la moins réfrangible, il n'y aura dans l'eſpace hN, que les couleurs qui vont depuis la couleur ρ' juſqu'au violet, & depuis la couleur ρ'' juſqu'au rouge.

18. Soit R la diſtance focale des rayons rouges infiniment proches de l'axe; $R - \omega dP - \delta\zeta^2$, la diſtance focale d'une autre eſpece de rayons quelconques, ζ étant ſuppoſé très-petit; Rr (Fig. 35) la cauſtique des rayons rouges, r le point où cette cauſtique eſt touchée par les rayons extrêmes, rV, ru, deux tangentes infiniment proches en r; on aura $Vu = 2\delta\zeta d\zeta$, $Vi = \frac{Vu \times \zeta}{R} = \frac{2\delta\zeta^2 d\zeta}{R}$, $\frac{Vi}{Vr}$, ou (à cauſe de l'angle KVR très-petit) $\frac{Vi}{VK} = \frac{d\zeta}{R}$; donc $VK = \frac{Vi.R}{d\zeta} = 2\delta\zeta^2$; on a de plus $VR = \delta\zeta^2$, $Kr = VK \times \frac{\zeta}{R} = \frac{2\delta\zeta^3}{R}$. Soit $KR = \alpha$, & $Kr = \gamma$, on aura $\gamma = \frac{2\delta\zeta^3}{R}$, $\alpha = VK + VR = 3\delta\zeta^2$, & $\zeta = \left(\frac{\alpha}{3\delta}\right)^{\frac{1}{2}}$, donc $\gamma = \frac{2\delta}{R} \times \left(\frac{\alpha}{3\delta}\right)^{\frac{3}{2}}$, ce qui montre (comme on le ſavoit d'ailleurs) que la cauſtique Rr eſt une ſeconde parabole cubique, dont je mets l'équation ſous cette

forme plus simple $y = Nx^{\frac{3}{2}}$, N étant $= \frac{2}{R\sqrt{(27\delta)}}\alpha^{\frac{3}{2}}$.

19. Pour déterminer, au moyen de cette caustique, la plus petite image ML des rayons rouges (par exemple), on nommera RO, z (Fig. 36), & on aura $MO = Nz^{\frac{3}{2}} = \frac{VO \times Kr}{KV}$. Or $Kr = N\alpha^{\frac{3}{2}}$, $VK = \frac{2}{3}\alpha$, $RV = \frac{\alpha}{3}$, $VO = RV - z$; donc $Nz^{\frac{3}{2}} = \frac{N\alpha^{\frac{3}{2}}.3}{2\alpha} \times \left(\frac{\alpha}{3} - z\right)$, & $z^{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{\alpha}}{2}\left(\frac{\alpha}{3} - z\right)$; donc $z^3 = \frac{\alpha}{4}(\alpha - 3z)^2$, équation à laquelle on satisfait aisément en prenant $z = \frac{\alpha}{4}$, ce qu'on savoit encore d'ailleurs. Donc ML ou $2OL = 2Nz^{\frac{3}{2}} = 2N \times \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \times \frac{\alpha}{4} = \frac{N\alpha^{\frac{3}{2}}}{4}$, & $OL = \frac{N\alpha^{\frac{3}{2}}}{8}$.

20. On trouvera les mêmes valeurs relativement à la caustique $V'u'$ (Fig. 35) des rayons violets, sensiblement égale & semblable à celle des rayons rouges, ainsi que les caustiques de tous les autres rayons colorés.

21. Maintenant on remarquera, 1°. que $RV' = \omega dP$ (Fig. 35); 2°. que $M'R = RV' + V'M' - KR = \omega dP + \frac{\alpha}{4} - \alpha = \omega dP - \frac{3\alpha}{4}$; & que $N'M' = \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{12}$; $N'V = \frac{\alpha}{12} + M'K + KV = \frac{\alpha}{12} + \omega dP$ —

$-\frac{3\alpha}{4}+\frac{2\alpha}{3}=\omega dP$; ce qu'on peut voir encore plus ſimplement, en conſidérant que $N'V'=RV$. 3°. Que ſi on cherche les points où les rayons $N'L'Y$, VrY concourent, on aura par conſéquent $VT=\frac{\omega dP}{2}$, $RT=\frac{\omega dP}{2}+\frac{\alpha}{3}$. Donc T ſera au-deſſus ou au-deſſous de K, c'eſt-à-dire, $RT >$ ou $< RK$, ſelon que $\frac{\omega dP}{2}+\frac{\alpha}{3}$ ſera $>$ ou $<\alpha$, c'eſt-à-dire, ſelon que ωdP ſera $>$ ou $<\frac{4\alpha}{3}$.

22. Si T eſt au-deſſus de K, ou ſe confond avec K, la plus petite image ſera $TY=\frac{\omega dP}{2}\times\frac{\epsilon}{R}$.

23. Si T eſt au-deſſous de K, la plus petite image ON (Fig. 37) ſe trouvera en conſidérant, 1°. que $RN'=\omega dP+\frac{\alpha}{3}$; 2°. que $RK=\alpha$, & ſi l'on fait $RO=u$, on aura $ON=N.u^{\frac{3}{2}}=\frac{\epsilon}{R}\times N'O=\frac{\epsilon}{R}\left(\omega dP+\frac{\alpha}{3}-u\right)$, équation d'où l'on tirera u.

24. Pour trouver la cauſtique qui paſſe par l'extrêmité H de l'image blanche, c'eſt-à-dire, la couleur qui forme cette cauſtique, on remarquera (Fig. 38) que $OH=ML=N\left(\frac{\alpha}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{N\alpha^{\frac{3}{2}}}{8}$; & que par con-

ſéquent dans la cauſtique ρH, on a $\rho O = \frac{\alpha}{4}$; donc puiſqu'on a la valeur de $RO = u$ (art. 23), on aura $R\rho = u - \frac{\alpha}{4}$; de plus, $R\rho = \omega d\omega$, $d\omega$ étant la quantité qui convient aux rayons de la couleur cherchée, quantité qui eſt $= 0$ pour les rayons rouges, & la plus grande pour les rayons violets. Donc $d\omega = \frac{4u - \alpha}{4\omega}$.

25. On trouvera de même les deux couleurs qui ſe réuniſſent en T (Fig. 39); en remarquant, 1°. que $PQ = \frac{N\alpha^{\frac{3}{2}}}{8}$. 2°. Que $PO = \rho\sigma'$, & que par conſéquent $HT = \frac{PO \times \zeta}{R} = \rho\sigma' \times \frac{\zeta}{R}$. Donc $OT = \frac{N\alpha^{\frac{3}{2}}}{8} + \frac{\rho\sigma' \times \zeta}{R} = N.O\sigma^{\frac{3}{2}}$; d'où l'on connoîtra $O\sigma$, le point σ' étant ſuppoſé donné.

26. Il faut de plus remarquer que ſi le point T ne ſe trouvoit point ſur la cauſtique σT, mais qu'il fût ſur la tangente à l'extrêmité de cette cauſtique, comme dans la Fig. 35, où Y eſt au-delà de r; alors le problême pour déterminer le point T ou σ, feroit encore plus facile, & il faudroit employer une méthode analogue à celle dont on s'eſt ſervi pour déterminer le point Y, par l'interſection des deux tangentes extrêmes $N'Y$, YrR.

27. Nous avons ſuppoſé, pour plus de facilité, toutes

les cauſtiques égales & ſemblables dans les recherches précédentes. Mais il eſt clair que, quand on voudroit avoir égard à la petite différence qui eſt entr'elles, & à la divergence très-petite des rayons rouges & violets qui partent de l'extrémité de la lentille, le problême ſe réſoudroit abſolument par les mêmes conſtructions & les mêmes méthodes, & que les calculs analytiques ſeroient ſeulement un peu plus compliqués.

28. Nous n'avons conſidéré juſqu'ici que les rayons parallèles entr'eux & à l'axe. Suppoſons préſentement que les rayons ſoient toujours parallèles entr'eux, mais inclinés à l'axe, & pour plus de facilité ſuppoſons que l'angle ABC (Fig. 39, n°. 2) de ces rayons avec l'axe CB ſoit très-petit, par exemple, de $16'$ pour le Soleil. On ſait, par la Dioptrique, que ſi on prolonge AB en R', de maniere que RR' ſoit perpendiculaire à BR, & que R ſoit le foyer des rayons rouges parallèles à l'axe, & infiniment proches de cet axe, R' ſera à très-peu près le foyer des rayons rouges qui font avec l'axe un angle $= ABC$. Faiſant donc ſur cet axe AR' les mêmes opérations que ſur l'axe AR dans les Figures précédentes, on trouvera de même la plus petite image pour cet axe AR, & les couleurs de cette image; de plus, il eſt clair que cette image ſera placée à très-peu près dans le plan & dans la direction de l'image ON (Fig. 33). Connoiſſant donc la partie blanche de chacune des deux images, la partie colorée de chacune, & la poſition des axes AR', CR (Fig. 39,

n°. 2) qui divisent ces deux images par leur centre, on connoîtra aisément la largeur de l'image totale, & les couleurs de ses différentes parties ; ce qui est trop facile pour que nous nous y arrêtions.

29. Au lieu de supposer les rayons parallèles, si on suppose qu'ils partent d'un point quelconque pris dans l'axe ou hors de l'axe, on connoîtra par une méthode absolument semblable, les images formées dans cette hypothèse; c'est un détail que nous abandonnons à nos Lecteurs.

30. Supposons qu'il n'y ait qu'une seule espece de rayons colorés, & que AB soit l'aberration de sphéricité de ces rayons, en sorte que A (Fig. 40) soit le foyer des rayons infiniment proches de l'axe, & B le foyer des rayons qui passent par l'extrêmité de la lentille, à la distance β de l'axe, on aura d'abord $AB = \delta\beta^2$, δ étant connu par ce qui précede. Soit ensuite C le point qui se peint exactement au fond de l'œil, & $AC = mAB = m\delta\beta\beta$; soit ensuite $AD = \delta xx$, ce qui donne $CD = m\delta\beta^2 - \delta x^2$, l'aberration du point D au fond de l'œil sera proportionnelle (Voyez Tome III de nos *Opusc.* XVIIIe Mém.) à CD multiplié par l'angle que fait au point D le rayon qui passe par ce point, angle qui est évidemment proportionnel à x, & qu'on peut supposer $= x$, en faisant $R = 1$; donc l'aberration du point D sera $(m\delta\beta\beta - \delta x^2)x = m\delta\beta^2 x - \delta x^3$, qui sera un *maximum* quand x^2 sera $= \frac{m\beta\beta}{3}$, & la valeur de ce

maximum ſera $\frac{2m\delta\zeta\zeta}{3}\sqrt{\left(\frac{m\zeta\zeta}{3}\right)} = \frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}} \times \delta\zeta^3$. Enfin l'aberration au point B ſera $= \zeta \times BC = (1 - m)\delta\zeta^3$. Or comme l'aberration au point B diminue à meſure que le point C monte vers B, & qu'au contraire l'aberration CD augmente, il eſt clair que l'aberration ſera la moindre quand ces deux quantités d'aberration ſont égales, ce qui donne $1 - m = \frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3}}$, d'où $m = \frac{3}{4}$. Ce qui s'accorde avec la théorie précédente, puiſqu'on a vu que $AB = \frac{1}{3}AO$, (r étant le point où la cauſtique eſt touchée par les rayons extrêmes) & que le point C où eſt la plus petite image donne $AC = \frac{1}{4}AO$. D'où $AC = \frac{3}{4}AB$.

31. Soit AK la demi-ouverture, N (Fig. 41) le foyer des rayons rouges infiniment proches de l'axe, L celui des rayons rouges qui viennent de K, en ſorte que LN ſoit l'aberration de ſphéricité des rayons rouges; alors prenant $LO =$ à l'aberration de réfrangibilité, il eſt clair que O ſera le point par où paſſeront les rayons violets venans de K, & que $NO = NL + LO$ ſera l'aberration longitudinale totale.

32. Tous les points entre O & L recevront donc des rayons venans de K; mais les points entre L & N n'en recevront que des points placés entre A & K. Soit u un point de LN; le point le plus éloigné de A & le plus proche de K qui enverra des rayons en u ſera k, ku étant le rayon qui touche la cauſtique NmM

en m; & uN fera l'aberration de fphéricité pour le rayon qui paffe par k. Tous les autres rayons paffant par y, donneront une ouverture Ak plus petite.

33. Donc, 1°. fi on fuppofe entre O & L un point i qui fe peigne exactement au fond de l'œil, comme le rayon qui paffe par i vient de k, l'aberration de l'image du point O au fond de l'œil (que j'appellerai l'*aberration oculaire*), fera proportionnelle à $Oi \times Ak$. 2°. Si on prend un point u entre L & N, l'aberration oculaire en u fera proportionnelle à $iu \times Ak$. Soit $Li = \zeta'$, $uL = u$, (d'où $ui = \zeta' + u$), $LN = \delta\zeta\zeta$ (AK étant $= \zeta$), enfin $Ak = x$, on aura $uN = \delta xx = \delta\zeta\zeta - u$; donc $x^2 = \zeta\zeta - \frac{u}{\delta}$, & l'aberration oculaire en u, $ui \times x = (\zeta' + u)\sqrt{\left(\zeta\zeta - \frac{u}{\delta}\right)}$. Suppofons $u = o$, ce qui fait tomber le point u en L, l'aberration oculaire en L fera $= \zeta\zeta'$, & fuppofons u infiniment petite, l'aberration fera $(\zeta' + u)\left(\zeta - \frac{u}{2\delta\zeta}\right)$ $= \zeta\zeta' + u\zeta - \frac{u\zeta'}{2\delta\zeta}$, qui fera évidemment $= \zeta\zeta'$ fi $2\zeta\zeta\delta = \zeta'$, $> \zeta\zeta'$ fi $2\zeta\zeta\delta > \zeta'$, & $< \zeta\zeta'$ fi $2\zeta\zeta\delta < \zeta'$.

34. Or fi on fuppofe que le point de la plus grande aberration oculaire foit en u, au-delà de L, entre L & N, il eft néceffaire que l'aberration en L foit $<$ que l'aberration en u.

35. Donc il eft néceffaire que $2\zeta\zeta\delta$ foit $> Li$ pour

que la plus grande aberration oculaire, d'un côté du point i, tombe entre L & N. (Nous verrons plus bas ce qui arrivera si $2\zeta\zeta\delta < Li$.)

36. Or $2\zeta\zeta\delta = 2LN$; donc si $2LN = Li$, l'aberration oculaire en L sera un *maximum*, i étant supposé le point qui se peint exactement au fond de l'œil; si $2LN > Li$, l'aberration oculaire ne sera pas un *maximum* au point L, & le sera pour quelque point u placé entre L & N.

37. De plus, tandis que l'aberration oculaire va en croissant de i en u, & qu'elle est un *maximum* en u, il est clair qu'elle va aussi en croissant de i en o, & qu'elle est un *maximum* en O; & que pour que cette aberration *maxime* soit la plus petite au fond de l'œil qu'il est possible, il faut que les deux aberrations soient égales; comme dans le cas ci-dessus (art. 31), où l'on a considéré les rayons d'une seule couleur.

38. Soit donc maintenant $OL = \delta'$, on aura $Oi = \delta' - \zeta'$, & l'aberration oculaire en O sera $= Oi \times AK = (\delta' - \zeta')\zeta$, laquelle doit être $=$ à l'aberration $(\zeta' + u)\sqrt{\left(\zeta\zeta - \frac{u}{\delta}\right)}$, cette derniere aberration elle-même étant un *maximum*.

39. Cherchant donc la valeur de u qui donne $(\zeta' + u)\sqrt{\left(\zeta\zeta - \frac{u}{\delta}\right)} =$ à un *maximum*, on aura $\frac{2}{\zeta' + u} = \frac{1}{\delta\left(\zeta\zeta - \frac{u}{\delta}\right)}$, ou $2\delta\zeta\zeta - 2u = \zeta' + u$, & $u =$

$\frac{2\delta\zeta\zeta-\zeta'}{3}$. Mettant cette valeur de u dans l'aberration $(\zeta'+u)\times\sqrt{\left(\zeta\zeta-\frac{u}{\delta}\right)}$, & égalant enſuite cette quantité à $(\delta'-\zeta')\zeta$, on aura la valeur de δ; ce qui donnera l'équation $\left(\frac{2\delta\zeta\zeta+2\zeta'}{3}\right)\times\sqrt{\left(\frac{\delta\zeta\zeta+\zeta'}{3\delta}\right)}=\delta'\zeta-\zeta\zeta'$; d'où l'on tirera ζ'.

40. De plus, il eſt néceſſaire, pour pouvoir réſoudre cette équation, & trouver une valeur poſſible de u, que Li ſoit $<$, ou du moins égal à la moitié de LO; car ſi Li étoit $>\frac{LO}{2}$, alors les images en O & en L étant entr'elles comme Oi à iL, l'aberration O ſeroit moindre que l'aberration en L, & comme l'aberration en L (*hyp.*) eſt $<$ que l'aberration en u, il eſt clair que l'aberration en O ne pourroit alors être égale à l'aberration en u.

41. C'eſt d'ailleurs ce qu'on voit aiſément par la valeur de $u=\frac{2\delta\zeta\zeta-\zeta'}{3}$, qui donne $2\delta\zeta\zeta=\zeta'$ lorſque $u=0$; & $\zeta\zeta'=\delta'\zeta-\zeta'\zeta$, ou $\delta'=2\zeta'$, c'eſt-à-dire, $OL=2\,Li=4\delta\zeta\zeta=4\,LN$. Donc ſi $2\,LN$ eſt $=\frac{LO}{2}$, alors $2\,LN$ ſera $=Li$; le point u ſera placé en L, u étant $=0$; & l'aberration oculaire ſera $A\zeta\zeta'$, A étant un coefficient qui dépend de la conformation & de la réfraction des humeurs de l'œil; & ſi $2\,LN$ (Fig. 41, n°. 2) eſt $>\frac{LO}{2}$, ou Li' (en ſuppoſant

$Li'=$

$Li' = \frac{LO}{2}$), alors on aura à plus forte raiſon $2LN >$ Li; donc prenant un point i très-près de i' & au-deſſous, l'aberration oculaire en i' ſera $>$ qu'en i (art. 33), & par conſéquent la plus grande aberration oculaire ſera (art. 36) en quelque point u entre L & N.

42. Mais ſi $2LN$ eſt $< \frac{LO}{2}$; alors prenant Li tant ſoit peu plus petite que $\frac{LO}{2}$, il eſt clair qu'on pourra avoir encore $2LN < Li$, & par conſéquent ſi on ſuppoſe que l'aberration oculaire en i ſoit $= 0$, l'aberration oculaire en L ſera $>$ (art. 33) que dans les points très-proches de L & au-deſſous; il ne faudra donc plus chercher le *maximum* d'aberration oculaire dans la ligne LN; & il eſt évident pour lors en plaçant le point i au milieu de la ligne LO, que ce point i ſera celui qui étant peint au fond de l'œil, donnera les deux aberrations égales pour le point O & pour le point L. On pourroit objecter cependant que dans le cas où $2LN$ eſt $< \frac{LO}{2}$, ſi on prend $Li < \frac{LO}{2}$, & tel que $2LN$ ſoit $> Li$, alors il ſeroit poſſible de trouver au-deſſous de L un point u tel que les aberrations oculaires en O & en L fuſſent égales; l'image diſtincte étant ſuppoſée en i. Mais en ce cas, ces deux aberrations ſeroient plus grandes que l'aberration oculaire en O, l'image diſtincte étant ſuppoſée au point milieu i de LO; & l'image

distincte *réelle*, doit en ce cas être au point i qui donne l'aberration oculaire plus petite.

43. On peut remarquer qu'en général, si le point i (Fig. 42) est celui qui se peint exactement au fond de l'œil en a, & que les points o, u, se peignent, le premier en-deçà de la retine en d, le second au-delà en e, MN étant la prunelle (ou partie de la prunelle, car il n'est pas nécessaire que KN & KM soient égales) & ac étant l'image ou l'aberration oculaire formée des deux aberrations égales (*hyp.*) aux points o & u; on aura $oi:iu::ae:ad$, $ac = \frac{KN \times ad}{aK}$, & aussi $= \frac{KM \times ae}{aK}$; donc $KN:KM::ae:ad::iu:oi$, d'où il est aisé de conclure que les points M, u, Z seront sensiblement en ligne droite, iZ étant perpendiculaire à Ou, & qu'ainsi le point Z se peindra au fond de l'œil en C, comme le point i en a; donc l'image iZ se peindra au fond de l'œil comme se peindroit à l'œil nu un objet placé en iZ.

44. On peut remarquer encore en passant que dans l'art. 464 du troisiéme volume de nos *Opuscules* (dont je suppose qu'on ait ici la figure sous les yeux), si au lieu de λ', qu'on peut ne pas supposer = à toute la largeur de la prunelle, on met sa valeur $\frac{AO \times Ba}{Aa}$, on aura l'aberration au fond de l'œil, proportionnelle à $\frac{AO}{BA}$, ce qui simplifiera beaucoup les calculs.

45. Tous les résultats de cette recherche sur l'aberration oculaire de l'image, & sur la véritable image

du fond de l'œil, s'accordent parfaitement, comme il est aisé de voir, avec celle que nous avons donnée ci-dessus du même problême, par l'intersection des caustiques, ou des limites mixtilignes des images des rayons rouges & des violets.

46. En effet, nous avons vu, 1°. que r étant le point où la caustique (Fig. 35) est touchée par les rayons rouges extrêmes, on a $KV = 2RV$; 2°. que $RV = \delta\zeta\zeta$; d'où $KV = 2\delta\zeta\zeta$; 3°. il est clair que RV' est égale à l'aberration de réfrangibilité, & que RV est $=$ à $V'N'$, puisque N' est le point par où passent les rayons violets extrêmes. Donc VN' est $=$ à l'aberration de réfrangibilité; c'est-à-dire, à δ'. Donc puisque $TV = \frac{1}{2}VN' = \frac{1}{2}\delta'$, il est clair, 1°. que si l'intersection V est au-delà de r, on aura TV ou $\frac{1}{2}\delta' > KV > 2\delta\zeta\zeta$, c'est-à-dire, $4\delta\zeta\zeta < \delta'$, & le point T qui donne la vraie image sera donné par l'intersection des tangentes extrêmes $N'Y$, VrY, comme on l'a vu ci-dessus. 2°. Si $4\delta\zeta\zeta = \delta'$, les points V & r se confondront, & le point de l'image sera en K. 3°. Enfin, si $4\delta\zeta\zeta > \delta'$, le point de la véritable image sera donné par l'intersection de la caustique Rr avec le rayon violet extrême $N'Y$, qui pour lors coupera cette caustique entre R & r (Fig. 37), par exemple, en N, & il n'est pas difficile de voir que l'équation qui résultera de cette intersection, sera précisément la même que l'équation $(\delta' - \zeta')\zeta = (\zeta' + u) \times \sqrt{\left(\zeta\zeta - \frac{u}{\delta}\right)}$

trouvée ci-dessus. En effet, on aura, en faisant $Vu = u$, (Fig. 37) & $OV = \beta'$, $\frac{(\delta' - \beta')\beta}{R} = ON = \frac{Ou}{R}$ multiplié par l'ouverture x ou $\sqrt{\left(\beta\beta - \frac{u}{\delta}\right)}$, qui répond au rayon tangent N. Or $Ou = OV + Vu = \beta' + u$. Donc on aura l'équation $(\beta' + u)\sqrt{\left(\beta\beta - \frac{u}{\delta}\right)} = (\delta - \beta')\beta$, précisément la même que celle de l'article 39.

47. La maniere dont nous avons trouvé par les méthodes précédentes l'aberration causée par une seule lentille objective, peut évidemment s'appliquer à l'aberration causée par un objectif & un oculaire. Car dans l'une & l'autre des deux méthodes, il n'y a qu'à distinguer pour l'oculaire, comme on a fait pour l'objectif, les deux aberrations NL & LO (Fig. 41, n°. 2) de sphéricité & de réfrangibilité, & suivre d'ailleurs exactement les mêmes procédés.

48. Si on nomme ρ la distance du foyer de l'oculaire à ce même oculaire, & x les différentes ouvertures de la lunette, il n'est pas difficile de voir que le foyer d'un rayon quelconque sera donné par la valeur $\rho + \eta dP + \mu xx$, les quantités η & μ, faisant ici la même fonction que ω & δ dans l'objectif. Les distances de l'oculaire & de l'objectif étant donc supposées données, ainsi que la distance de l'œil à l'oculaire, quand on aura trouvé par les méthodes précédentes, le point de la véritable

image, & l'aberration de cette image au fond de l'œil, alors il faudra chercher quelle doit être la diſtance de l'oculaire à l'objectif, & celle de l'œil à l'oculaire, pour que cette aberration au fond de l'œil ſoit la moindre qu'il eſt poſſible ; & pour que, par conſéquent, l'image ſoit la plus diſtincte. Pour cela, on réſoudra d'abord le problême en regardant comme conſtante une de ces deux diſtances, que j'appelle D & D' ; par exemple, on ſuppoſera D' conſtant, & on aura une équation en D, d'où l'on tirera la valeur de D & celle de l'aberration oculaire *minime*, exprimées en D', enſuite on fera cette derniere expreſſion un *minimum*, & on aura une équation en D' ; d'où l'on tirera aiſément D' & enſuite D. Cette recherche, que d'autres Géométres pourront aiſément pouſſer plus loin, peut être fort utile pour perfectionner la théorie des oculaires.

49. La méthode que nous avons donnée dans les recherches précédentes pour trouver la largeur du foyer d'une lentille, peut s'appliquer à d'autres cas avec beaucoup de facilité. Soit, par exemple, DAB (Fig. 43), un miroir ardent, ſur lequel les rayons tombent parallélement à AC, & dans lequel AB ſoit plus petit que AD. Ayant fait $CG = \frac{AC}{2}$ (C étant le centre du miroir), & ayant décrit les cauſtiques GH & GK, & mené les rayons réfléchis EF, Li, qui viennent des extrêmités B, D du miroir, il eſt clair, par la théorie précédente, que tous les rayons réfléchis ſeront

compris dans l'espace renfermé par les lignes mixtes *LiaH*, *EgK*, & on voit par la seule inspection de la figure que *ga* est la moindre ligne perpendiculaire à *CA*, qu'on puisse tirer entre ces deux espaces. Donc cette ligne *ga* est le lieu du foyer.

50. Imaginons présentement que le miroir *MB*; (Fig. 44) dans lequel $MB = MD$, soit exposé directement au Soleil, & ayant fait les angles *MCA*, *MCA'*, chacun de $16'$, parce que le diametre du Soleil est de 32, il est clair que tous les rayons qui viennent des bords du Soleil, seront parallèles, ou censés parallèles à *CA*, *CA'*, & que tous ceux qui viennent du centre seront parallèles ou censés parallèles à *CM*. Faisant donc *Cb* & *Cg* égales à la moitié du rayon, & décrivant les caustiques *bO*, *gL*, on trouvera aisément que si *a* est la largeur du foyer pour les seuls rayons qui viennent du centre, la largeur du foyer total sera à très-peu-près $a +$ la petite ligne *gab*, laquelle est égale à $32'$ multipliée par la moitié du rayon. Le calcul rigoureux seroit plus compliqué, mais facile à faire. On voit seulement que la considération du diametre du Soleil agrandit beaucoup le foyer. Pour s'en convaincre, il suffit de se rappeller que si r est le rayon d'un miroir, β la moitié de sa largeur, l'aberration longitudinale sera (Tom. III, *Opusc.* pag. 76) $\frac{\beta^2}{4r}$, & la largeur du foyer $= \frac{2 \times \beta^2}{4 \cdot 4r} \times \frac{\beta . 2}{r} = \frac{\beta^3}{4rr}$, pour

les rayons qui partent du centre du Soleil. Or le diametre du Soleil ajoute à cette largeur de chaque côté une quantité à peu-près égale à $\frac{r}{2} \times \frac{32'}{\text{sin. tot.}}$ = à très-peu-près $\frac{r}{2} \times \frac{32'}{57.60} = \frac{r}{2} \times \frac{1}{120} \times \left(1 + \frac{1}{15} + \frac{1}{20}\right)$.

51. Il est aisé de voir par la théorie précédente, que dans toute ligne perpendiculaire à l'axe, qui joint les deux caustiques, & qui représente le foyer, les rayons sont plus serrés à l'extrêmité de cette ligne, dans l'endroit où elle rencontre la caustique, parce que dans tout autre point de cette ligne, il ne passe que deux rayons venans l'un d'un côté de l'axe, l'autre de l'autre côté, au lieu que dans chaque point de la caustique il passe au moins très-sensiblement tous les rayons qui viennent du petit arc du verre ou du miroir répondant à ce point de la caustique. D'où il s'ensuit que si on expose un corps perpendiculairement à l'axe d'un verre ou d'un miroir, un peu au-dessus ou au-dessous du point où se réunissent les rayons proches de l'axe, l'inflammation doit se faire d'abord à la circonférence, & ne commencera par le centre que dans le cas où le corps sera placé au foyer même des rayons proches de l'axe, ce qui est conforme à l'expérience. C'est l'explication que j'ai donnée de cette expérience au mois de Mai 1778, dans une Assemblée de l'Académie, où on propose d'en donner la raison.

52. Nous ajouterons ici quelques remarques sur les

couleurs produites par la réfraction, même dans un verre plan, & sur le spectre solaire formé par la réfraction dans une chambre obscure. Si un rayon blanc *FD*, que je suppose d'une épaisseur infiniment petite tombe sur un verre plan, il se dilatera par la premiere réfraction dans l'espace *MN* (Fig. 45), le rouge étant vers *M*, & le violet vers *N*, & cet espace sera d'autant plus grand que le verre sera plus épais. C'est ce que j'ai déja remarqué Tom. III de mes *Opusc.* pag. 394.

53. Les rayons *DM*, *DN* sortiront de ce verre plan suivant des lignes *MQ*, *NO* (Fig. 46), parallèles l'une à l'autre, & à la premiere position du rayon incident. Si on les reçoit de-là sur un second verre de la même épaisseur, il est aisé de voir que le rayon se dilatera du double par la seconde réfraction, & ainsi de suite; en sorte que le rouge sera toujours vers le côté *MQ*, le violet vers le côté *NO*, & que les différentes couleurs dont le rayon est composé à l'infini, seront par conséquent du double plus sensibles.

54. D'où il est clair qu'en multipliant les verres plans parallèles, ou en supposant un seul verre plan d'une épaisseur égale à la somme des épaisseurs de tous ces verres, la dilatation sera la même.

55. La ligne *MN* est aisée à calculer suivant la valeur de l'angle d'incidence, celle du rapport des sinus, & l'épaisseur du verre.

56. Par exemple, si on mène la perpendiculaire *DR* (Fig. 45) aux deux faces du verre, & qu'on suppose

$\frac{50}{77}$ pour la réfrangibilité des rayons rouges, & $\frac{50}{78}$ pour celle des rayons violets, on aura RM à RN à très-peu-près, comme 78 à 77. Soit $DR =$ 1 pouce, & $RM =$ 2 pouces, par exemple, ou 24 lignes, on aura $MN =$ environ $\frac{1}{3}$ de ligne, ce qui est peu de chose; mais trois verres plans donneroient une ligne de largeur, & on pourroit appercevoir sensiblement le rouge à droite, & le violet à gauche.

57. Depuis que j'ai imprimé cette remarque sur l'espece de dilatation que souffre un rayon simple réfracté par un verre plan, & sur les couleurs qui doivent en résulter, j'ai vu, ce que j'ignorois alors, que M. Newton avoit déja fait la même observation dans ses *Lectiones Opticæ*; il ajoute même avec raison, que comme le Soleil n'est pas un point mathématique, non plus que le trou par lequel on fait passer les rayons, & chaque point du Soleil devant ainsi produire pour chaque point du trou, une espece d'image rectiligne oblongue & colorée vers ses bords, d'un côté en rouge, de l'autre en violet, avec les couleurs intermédiaires placées entre ces deux bords, le mêlange & le rapprochement de toutes ces images, formeront une image blanche dans son milieu, & colorée vers ses bords, ayant d'abord le rouge simple, puis le rouge avec l'orangé, puis le rouge avec l'orangé & le jaune, & ainsi de suite jusqu'au blanc, qui vers l'autre extrêmité se colorera de même par degrés en perdant d'abord le rouge, puis le rouge & l'orangé, puis le rouge,

l'orangé & le jaune, &c., & ainsi jusqu'au simple violet. C'est-là ce que l'expérience doit donner.

58. Venons maintenant à la figure du spectre solaire, formé par la réfraction.

59. Je suppose que les rayons du Soleil (dont *MN* soit le diametre) tombent par un point *D* (Fig. 47) sur un verre plan, & ayant ses faces parallèles *AD*, *BC*; il est clair que s'il n'y avoit point de réfraction, l'image du Soleil se projetteroit sur la face *BC* en forme d'ellipse ou de cercle, savoir, d'ellipse si le rayon *SD* est oblique au verre, & de cercle s'il y est perpendiculaire.

60. En vertu de la double réfraction à l'entrée & à la sortie du verre, les rayons sortent du verre parallélement à leur premiere position; on seroit peut-être tenté d'en conclure que l'image du Soleil, reçue sur un plan *FKH* sera elliptique, comme elle l'eut été s'il n'y avoit aucune réfraction. Mais on se tromperoit; il est aisé de le prouver.

61. En effet, soit *LRQ* (Fig. 48) l'image elliptique qui seroit formée sans réfraction sur la face inférieure du verre; soit la distance des deux faces $DO = \alpha$, & nommant OL, r, & z l'angle ROL entre l'axe de l'ellipse & le rayon r, l'équation de l'ellipse sera en général, comme l'on sait, $rr \operatorname{cos.} z^2 + Arr \operatorname{sin.} z^2 + Br \operatorname{cos.} z + C = 0$. Soit ensuite DP le rayon réfracté du rayon DL, $OP = \rho$, & $1 : m$ le rapport du sinus d'incidence à celui de réfraction, en passant de l'air dans le verre, on aura

$1 : m^2 :: \frac{r^2}{\alpha^2+r^2} : \frac{\rho^2}{\alpha^2+\rho^2}$, ou $\frac{\alpha^2+\rho^2}{\rho^2} = \frac{\alpha^2+r^2}{m^2 r^2}$; c'est-à-dire, $1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{\alpha^2}{m^2 r^2}$.

62. Présentement si on mène Pd parallèle à LD, Pd représentera le rayon rompu au sortir du verre, & on aura, en nommant Od, ζ, l'équation $\frac{r}{\rho} = \frac{\alpha}{\zeta}$.

63. D'où l'on voit que comme r n'est pas à ρ en rapport constant, & que α est constant, ζ est par conséquent variable; qu'ainsi tous les rayons émergens, quoique parallèles aux incidens, n'aboutissent pas en un seul point d, comme les rayons incidens en un seul point D; c'est pour cela que l'image, au sortir du verre, n'est pas elliptique, comme elle le seroit s'il n'y avoit point de réfraction.

64. Pour trouver l'équation de cette image, soit $OK = k$, & l'on verra aisément, qu'en prenant dans cette nouvelle image le point K pour le sommet des angles z (égaux & correspondans aux angles z) & pour le sommet des ρ', on aura $\rho' : \rho :: \zeta + k : \zeta$; d'où $\rho = \frac{\rho' \zeta}{\zeta + k}$; & comme on a déja $\zeta = \frac{\alpha \rho}{r}$, on aura l'équation $1 = \frac{\alpha \rho'}{\alpha \rho + k r}$, & $\rho = \rho' - \frac{k r}{\alpha}$. Donc $\rho' = \frac{k r}{\alpha} + \rho$; la premiere partie $\frac{k r}{\alpha}$, donne une ellipse, dont les rayons sont à ceux de l'ellipse désignée ci-dessus (art. 61), comme k est α. Mais le rayon ρ n'étant

pas celui d'une ellipſe, comme il eſt aiſé de le voir en comparant l'équation $1+\frac{\alpha^2}{\rho^2}=\frac{1}{m^2}+\frac{\alpha^2}{m^2r^2}$, avec l'équation rr coſ. z^2+Arr ſin. z^2+Br coſ. $z+C=0$, il eſt évident que la courbe cherchée n'eſt pas elliptique.

65. Au reſte, on voit aiſément par l'équation $\rho'-\frac{kz}{\alpha}=\rho$, ou $\rho'=\frac{kz}{\alpha}+\rho$, que la courbe dont le rayon eſt ρ, & qui eſt formée par la premiere réfraction, étant donnée, on aura très-aiſément la courbe dont le rayon eſt ρ', en ajoutant aux rayons $\frac{kz}{\alpha}$ (qui appartiennent à une ellipſe), les rayons ρ correſpondans au même angle z.

66. Si on met dans l'équation $1+\frac{\alpha^2}{\rho^2}=\frac{1}{m^2}+\frac{\alpha^2}{m^2r^2}$, au lieu de ρ ſa valeur $\rho'-\frac{kr}{\alpha}$, au lieu de r^2 ſa valeur $\frac{-C-Br\text{ coſ. }z}{\text{ſin. }z^2+A\text{ coſ. }z^2}$, on aura une équation où r ne ſe trouvera plus qu'au premier degré, & d'où l'on tirera la valeur de r, qui étant ſubſtituée dans l'équation en r & en z, donnera l'équation en ρ' & en z de la projection ou image du ſpectre.

67. Si la projection elliptique formée ſur la ſurface BC (Fig. 47), ſans réfraction, avoit ſon centre en O, c'eſt-à-dire, ſi le rayon SD étoit perpendiculaire au verre, alors cette projection ſeroit un cercle qui au-

roit O pour centre, on auroit $A = 1$, $B = 0$, $r =$ à une constante, & ρ auſſi égale à une conſtante, ainſi que r, & l'image ſeroit circulaire au ſortir du verre, ce qui ſe voit d'ailleurs aiſément.

68. Comme l'image formée en FK, n'eſt pas elliptique, elle peut très-bien n'avoir pas, ainſi que l'ellipſe, deux parties égales & ſemblables au-deſſus & au-deſſous de la ligne qui paſſe par ſon centre perpendiculairement à ſon axe. Ainſi, en ne ſuppoſant même qu'une ſeule eſpece de rayons & de réfrangibilité, les différentes images formées par la chûte des rayons ſolaires ſur les différens points du trou, ne ſeroient pas exactement terminées par des droites parallèles.

69. Et ſi de plus on a égard à la variabilité de m pour les rayons de différentes couleurs, on voit que les images formées par ces rayons, même pour un ſeul trou infiniment petit D, ne ſeront pas les mêmes, & qu'ainſi les limites du ſpectre ne ſeront pas, au moins exactement, une ligne droite.

70. Il en ſera de même, à plus forte raiſon, pour le priſme, le calcul en eſt ſeulement un peu plus compliqué, mais d'ailleurs facile à faire; on déterminera aiſément la figure de chaque image du Soleil formée par des rayons de réfrangibilité donnée, & paſſant par un point du trou; & on déterminera enſuite, par les méthodes connues, la courbe qui touche toutes ces images, & qui donnera le contour du ſpectre.

71. Dans le Tom. III de nos *Opuſc.* pag. 393, nous

avons remarqué que si la lumiere n'étoit pas composée de rayons différemment réfrangibles à l'infini, il y auroit dans le spectre formé par le prisme des intervalles non lumineux. Il faut cependant remarquer, que si ces intervalles, pris par rapport à un simple & unique rayon, étoient peu considérables, c'est-à-dire, si le papier sur lequel on reçoit l'image du spectre étoit assez près du trou, alors, comme le Soleil n'est pas un simple point, non plus que le trou, les images formées par chaque point du Soleil & chaque point du trou, se couvrant en partie les unes les autres, les espaces non éclairés pourroient disparoître.

72. Quoique la plûpart des Physiciens semblent persuadés que M. Newton n'a admis que sept couleurs différentes, chacune homogène & pure, & ne souffrant par les réfractions réitérées aucune altération ; ce grand homme néanmoins, paroît avoir reconnu, en plusieurs endroits de son *Optique* & de ses *Leçons Optiques*, que le spectre n'est pas formé seulement des sept couleurs désignées dans tous les Livres de Physique, mais qu'il est formé par des rayons rompus suivant tous les rapports possibles, depuis le rouge le plus vif jusqu'au violet le plus foncé. Il observe même que si la lumiere n'étoit pas composée de couleurs ou de rayons différemment réfrangibles à l'infini, en ce cas le spectre ne seroit pas terminé par deux droites parallèles. Cette remarque, quoique très-juste en elle-même, ne paroît pas rigoureuse-

ment démonſtrative ; 1°. parce que le ſpectre, comme nous l'avons obſervé & prouvé ci-deſſus, n'eſt pas & ne ſauroit être terminé rigoureuſement par des lignes droites parallèles : 2°. parce que la largeur du trou donnant différentes images (indépendamment même de la diverſe réfrangibilité des rayons) il en réſulteroit déja un ſpectre allongé & terminé en partie par des droites parallèles, ce qui pourroit rendre moins ſenſible le non parallélisme des lignes terminantes dans les parties du ſpectre qui proviendroient des différentes couleurs. 3°. Enfin, parce que la terminaiſon du ſpectre à droite & à gauche n'eſt pas aſſez nette, aſſez tranchante, & la réfrangibilité de deux couleurs voiſines aſſez différente, pour que la non-rectitude des lignes terminantes pût être bien ſenſible. Il me ſemble qu'on peut trouver une preuve plus ſatisfaiſante de la réfrangibilité indéfinie & non diſcontinue des rayons de lumiere, par les ombres qui ſépareroient, comme nous l'avons remarqué, les parties du ſpectre, s'il n'y avoit qu'un nombre déterminé de couleurs primitives.

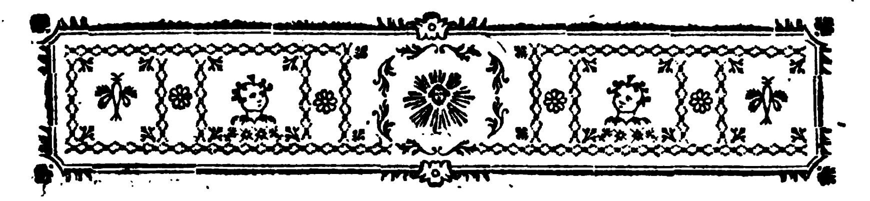
73. Quoi qu'il en ſoit, on peut être étonné, ce me ſemble, que M. Newton ayant reconnu que la lumiere étoit compoſée d'une infinité de rayons tous diverſement réfrangibles par degrés contigus & inſenſibles, ait diſtingué ſept couleurs, plutôt que d'avoir dit ſimplement qu'il y en a un nombre indéfini, qu'il ait diviſé le ſpectre en même raiſon que le monocorde, puiſque cette diviſion eſt purement précaire & arbitraire,

s'il y a des couleurs à l'infini; enfin qu'il ait semblé admettre une lumiere homogène & non altérable par la réfraction, puisqu'il n'y a point de rayon qui ne puisse, par la réfraction, se disperser en une infinité d'autres, & que la lumiere est susceptible de degrés de réfraction à l'infini, renfermés, il est vrai, entre les limites de la réfraction du rouge le plus vif, & du violet le plus foncé. Il semble que si M. Newton s'étoit exprimé de la sorte, les Physiciens n'auroient point été induits en erreur (au moins pour la plûpart) sur le nombre des couleurs primitives, & en auroient reconnu une infinité.

74. En finissant ces recherches, nous invitons les Physiciens à vérifier par des expériences, les différens objets dont nous avons parlé dans les Mémoires de l'Académie de 1767, pag. 95, §. VII, entr'autres, sur l'exactitude du rapport des sinus, & sur celles de quelques autres loix de la réfraction. Nous les invitons même à s'assurer exactement si un rayon qui a traversé un verre plan, sort exactement parallèle à sa premiere position; car enfin, ce parallélisme n'est pas démontré rigoureusement par la théorie, comme nous l'avons observé dans le Tome V de nos *Opuscules*, XLIII[e] Mém. §. VI, art. 27, pag. 466. Ce même Mémoire, & le XX[e] Mémoire imprimé dans nos *Opuscules*, Tom. III, contiennent plusieurs autres remarques sur la théorie & les phénomènes de la réfraction, qui nous paroissent mériter quelqu'attention de la part des Physiciens

ficiens Géomètres ; nous les invitons d'autant plus volontiers à les examiner, que ces remarques ne contiennent guère que de ſimples queſtions propoſées en forme de doutes, dont l'éclairciſſement ne pourra que contribuer au progrès de l'Optique.





LV. MÉMOIRE.

Recherches ſur différens Sujets.

§. I.

Sur le mouvement des corps peſans, en ayant égard à la rotation de la Terre autour de ſon axe.

L'EXTRAIT de ce Mémoire a été lu à l'Académie le 6 Septembre 1771, & inſéré dans l'Hiſtoire de cette même année, pag. 10. Mais comme les différentes propoſitions énoncées dans cet extrait, n'y ſont point accompagnées de leurs démonſtrations, j'ai cru, quoique ces démonſtrations ne ſoient pas fort difficiles, qu'on me permettroit de les joindre ici, pour épargner aux Géomètres la peine de les chercher. Les calculs qu'on va lire avoient été remis au Secrétaire de l'Académie dès le 22 Décembre 1770.

1. Soit AaE (Fig. 49) l'équateur, C le centre de la terre, G la viteſſe de rotation de la terre, & par conſéquent du point A autour du centre C, $CA = a$; ſoit auſſi un corps grave lancé perpendiculairement de A

vers F, avec la viteſſe γ dans le plan de l'équateur AaE. Il eſt clair, 1°. que ce corps recevra en même-temps horiſontalement une viteſſe $=G$ par la main ou l'inſtrument qui le lance; 2°. qu'en vertu de ces deux viteſſes, il aura une viteſſe de projection abſolue g, & qu'il décrira en conſéquence la portion d'ellipſe ABa, dont le foyer ſera en C; 3°. que le temps employé par le corps A à décrire l'arc elliptique ABa, ſera au temps employé par le point A de la terre à décrire l'arc circulaire Aa, comme le ſecteur elliptique $ABaC$ eſt au ſecteur circulaire ACa; or il eſt viſible que $ABaC > ACa$, d'où il s'enſuit que quand le corps grave ſera en a, le point A de la terre ſera un peu plus loin que a, c'eſt-à-dire, en α, de maniere que $AC\alpha = ABaC$; & qu'ainſi, comme la terre tourne d'occident en orient, le corps grave A retombera en un point a, plus occidental que le point A, qui eſt arrivé en α.

2. Nous verrons bientôt quelle doit être la différence des arcs Aa, $A\alpha$, mais avant que de l'aſſigner, ſuppoſons qu'en général le corps A ſoit lancé obliquement ſuivant AH avec une viteſſe g, réſultante à-la-fois de la viteſſe qu'il reçoit de la rotation de la terre, & de celle que lui imprime la force qui le lance; ſoit le ſinus de l'angle $CAh = h$, M la maſſe de la terre, a, le demi-grand axe de l'ellipſe ou de la ſection conique décrite par le corps. On ſait, 1°. que $gg = \frac{2M}{a} - \frac{M}{a}$; 2°. que le

demi-parametre p du grand axe $= \frac{aagghh}{M}$; 3°. que si la section conique est une ellipse, a sera positif comme nous l'avons supposé; que si a est infini, la section sera une parabole; qu'enfin si a est négatif, la section sera une hyperbole. Soit donc la vitesse absolue de projection g, telle que $gg = 2p'K'$, p' étant la pesanteur, ou $\frac{M}{aa}$ (car pour plus de simplicité & de facilité, nous supposons ici la terre sphérique), on aura $\frac{2k'}{aa} = \frac{2}{a} - \frac{1}{a}$; d'où il s'ensuit que la section sera une ellipse, si $k' < a$, une parabole si $k' = a$, une hyperbole, si $k' > a$.

3. De plus, l'angle de projection HAC étant obtus, & C le foyer de la trajectoire, il est aisé de voir, par les sections coniques, que le sommet B de la section doit tomber au-dessous de A du côté h, opposé à H, si la section est parabolique ou hyperbolique; d'où il s'ensuit que si $k' =$ ou $> a$, le corps grave A ne doit jamais retomber sur la surface de la terre.

4. Soit γ la vitesse de projection verticale, & telle que $\gamma = 2p'\lambda = \frac{2M\lambda}{aa}$, G' la vitesse absolue horisontale, en sorte que $G' - G$ soit la vitesse imprimée par la puissance qui a lancé le corps; il est aisé de voir que $G' = gh$; & (en supposant $G'G' = 2p'\mu = \frac{2M\mu}{aa}$), on aura $gg = G'G' + \gamma\gamma = M\left(\frac{2\mu}{aa} + \frac{2\lambda}{aa}\right)$

$= \frac{2M}{a} - \frac{2}{a}$. Donc la section sera parabolique ou hyperbolique si $\mu + \lambda$ est $=$ ou $> a$.

5. Soit maintenant $BO = 2a$ (Fig. 50), le grand axe de l'ellipse BA, décrite par le corps grave, dans le cas où la section doit être elliptique; soit C le foyer inférieur de cette ellipse, c'est-à-dire, le plus éloigné du sommet B, (je prends le foyer inférieur, parce que l'angle de projection CAB est obtus); soit encore G le centre de l'ellipse, BMO le demi-cercle circonscrit, l'excentricité $GC = ma$, en sorte que le demi-parametre $p = a(1 - mm)$. Ayant décrit l'arc AD du rayon $CA = a$, soit menée la perpendiculaire NAM à l'axe, & soient nommés les angles ACD, s, & BGM, u, on aura évidemment $NM = a$ sin. u, $GN = a$ cos. u; AN que j'appelle $t = a \text{ sin. } u . \sqrt{(1 - mm)}$, & sin. $s = \frac{a \text{ sin. } u . \sqrt{(1 - mm)}}{a}$. On aura de plus le secteur elliptique $BAC = BMC . \sqrt{(1 - mm)} = \frac{aa\sqrt{(1 - mm)}}{2}(u + m \text{ sin. } u)$, & le secteur circulaire $DAC = \frac{aas}{2}$, ou $\frac{aa}{2} \times$ l'angle dont le sinus est $\frac{a \text{ sin. } u \sqrt{(1 - mm)}}{a}$.

6. Maintenant, pour que le corps retombe au même point d'où il a été lancé, il faut évidemment que le temps employé par ce corps à parcourir l'arc elliptique AB, & le temps employé par le point A de la terre à par-

courir l'arc circulaire *AD* soient égaux entr'eux. Or ces temps sont entr'eux comme $\frac{\text{sect. } ACB}{G'} : \frac{\text{sect. } ACD}{G}$; donc, à cause de $G' = gh$, & de p ou $a(1-mm) = \frac{aagghh}{M}$, il est clair que si on suppose $GG = \frac{M}{a\lambda}$, on aura la proportion suivante : $a^2 \sqrt{(1-mm)}(u + m \text{ sin. } u) : a^2 \times$ angl. dont le sin. $= \frac{a \text{ sin. } u \sqrt{(1-mm)}}{a} :: \frac{\sqrt{a}.\sqrt{(1-mm)}}{a} : \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$, ou $u + m$ sin. $u : \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} \times$ angl. sin. $\left(\frac{a \text{ sin. } u \sqrt{(1-mm)}}{a}\right) :: \sqrt{\lambda} : \sqrt{a}$.

7. Cela posé, la force centrifuge à l'équateur étant $\frac{M}{289aa}$ (a^1); on trouvera aisément que $GG = \frac{M}{289a}$; & qu'ainsi $\sqrt{\lambda} : \sqrt{a} :: 17 : 1$. Voyons donc quelle doit être la vitesse de projection pour que les deux premiers termes de la proportion précédente soient entr'eux comme 17 à 1.

8. Pour cela, on considérera d'abord que par la propriété de l'ellipse on a en général tout rayon $CA = a(1 + m \text{ cos. } u)$ (a^2), d'où il s'ensuit que CA étant $= a$, on a $\frac{a}{a} = 1 + m$ cos. u; supposons donc u un angle quelconque, & la proportion générale de l'article 6, deviendra $u + m$ sin. $u : (1 + m \text{ cos. } u)^{\frac{3}{2}} \times$ angl.

(a^1 & a^2) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

$\text{fin.}\left(\frac{1}{1+m\,\text{cof.}\,u}\times\sqrt{(1-mm)}\times\text{fin.}\,u\right)::17:1.$

9. Regardons maintenant u comme une conftante prife à volonté, égale, plus grande ou plus petite que 90°, mais jamais $>180^\circ$, comme le problême l'exige; & dans cette fuppofition, traitons m comme inconnue; prenons $u+m$ fin. u d'une part, & de l'autre $(1+m\ \text{cof.}\ u)^{\frac{3}{2}}\times$ l'angle dont le finus eft $\left(\frac{1}{1+m\,\text{cof.}\,u}\times\right.$ fin. $u\times\sqrt{(1-mm)}$ pour les *abfciffe* & *ordonnée* d'une courbe qui ait l'équation précédente; il s'agit, u étant fuppofée donnée, de déterminer m par la condition que l'*abfciffe* foit à l'ordonnée comme 17 à 1.

10. Or il eft vifible, 1°. que m étant $=0$ (ce qui eft la plus petite valeur que m puiffe avoir, puifqu'il ne fauroit être négatif), la premiere abfciffe fera $=u$, & que l'ordonnée correfpondante fera l'angle dont le finus eft fin. u; c'eft-à-dire, u. 2°. Que dans le cas de $m=1$ (ce qui eft la plus grande valeur que m puiffe avoir dans l'hypothèfe préfente, où l'on fuppofe que la trajectoire eft elliptique), la derniere abfciffe qui répond à cette valeur de $m=1$, fera $u+$ fin. u, & l'ordonnée correfpondante fera $=0$. De plus, il eft clair que l'abfciffe $u+m$ fin. u va toujours en croiffant, à mefure que m croît, fa différence $du[1+m\ \text{cof.}\ u]$ étant toujours pofitive; d'où il s'enfuit que la folution fera toujours poffible, puifque la premiere abfciffe u eft égale à l'ordonnée correfpondante, c'eft-à-dire, à

l'angle dont le ſinus eſt u, & qu'il y aura par conſéquent entre $m = 0$ (qui donne le rapport de l'abſciſſe à l'ordonnée $= 1$, & par conſéquent < 17), & $m = 1$, (qui donne le rapport de l'abſciſſe à l'ordonnée $= \frac{1}{0}$, ou ∞) une valeur de m qui réſoudra le problême (a^3).

11. Nous avons ſuppoſé ci-deſſus (art. 9, n°. 2) que dans le cas de $m = 1$, l'ordonnée répondante à l'abſciſſe $u + \text{ſin.}\, u$, & qui eſt égale à $(1 + m \,\text{coſ.}\, u)^{\frac{2}{1}} \times$ l'angle dont le ſinus eſt $\left(\frac{1}{1 + m \,\text{coſ.}\, u} \times \sqrt{(1 - mm)} \times \text{ſin.}\, u\right)$, eſt $= 0$, par la raiſon que ce dernier ſinus eſt alors $= 0$. Mais comme u peut être ſuppoſé égal ou preſqu'égal à 180°, & que par conſéquent $\text{ſin.}\, u = \text{ſin.}\, 180° = 0$, on pourroit douter ſi l'angle qui répond à l'autre ſinus, n'eſt pas auſſi $= 180°$, au lieu d'être zero, ce qui laiſſe quelqu'incertitude dans la ſolution précédente.

12. Pour s'en éclaircir, il faut conſidérer que par les recherches & les conſtructions précédentes, l'angle dont le ſinus eſt $\frac{1}{1 + m \,\text{coſ.}\, u} \times \text{ſin.}\, u \times \sqrt{(1 - mm)}$, n'eſt autre choſe que l'angle DCA, qui a pour coſinus $\frac{NC}{CA} = \frac{a}{a} \times (m + \text{coſ.}\, u) = \frac{m + \text{coſ.}\, u}{1 + m \,\text{coſ.}\, u}$; d'où il eſt clair qu'en prenant u tant ſoit peu plus petit que 180°, & $m = 1$, ce qui donne coſ. u négatif, & < 1, la quantité $\frac{m + \text{coſ.}\, u}{1 + m \,\text{coſ.}\, u}$, ſera toujours poſitive, & que par

(a^3) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

conſéquent

conséquent l'angle qui a ce cosinus, & dont le sinus est $\frac{1}{1+m\,\text{cos.}\,u} \times \text{sin.}\, u \times \sqrt{(1-mm)}$, ne sera jamais $> 90^\circ$, tant que u ne sera pas $= 180^\circ$; d'où il s'ensuit qu'en prenant même $u = 180^\circ$, l'angle dont il s'agit ne sera point égal à 180°, puisqu'il y auroit alors *un saut* dans la valeur de cet angle. Donc cet angle est $= 0$, lorsque son sinus $= 0$. Donc la supposition que nous avons faite est légitime. Donc il y a nécessairement une valeur de m entre 0 & 1, qui résout le problême.

13. Si l'angle u, qu'on suppose donné, & d'où l'on tire la valeur de m par la solution de l'article 10 ci-dessus, est tel que cos. u soit négatif, c'est-à-dire, si cet angle est $> 90^\circ$, alors l'angle DCA qui a pour cosinus $\frac{m+\text{cos.}\,u}{1+m\,\text{cos.}\,u}$, devient aussi $> 90^\circ$, tant que m est $<$ que cos. u pris positivement. C'est pourquoi si on veut exprimer l'angle DCA par son sinus $\frac{1}{1+m\,\text{cos.}\,u} \times \sqrt{(1-mm)} \times \text{sin.}\, u$ suivant les méthodes connues, il faut prendre garde si, dans le cas où cos. u est négatif, m est $>$ ou $<$ cos. u; dans le premier cas, nommant ω le sinus de DCA, c'est-à-dire, $\frac{1}{1+m\,\text{cos.}\,u} \times \text{sin.}\, u \times \sqrt{(1-mm)}$, cet angle sera $= \omega + \frac{\omega^3}{2.3}$, &c. dans le second, cet angle sera égal à $180^\circ - \omega - \frac{\omega^3}{2.3}$, &c.

14. Si donc on veut réduire en calcul la proportion de l'art. 8 qui donne la valeur de m, celle de u étant supposée donnée, il faudra écrire $\frac{u + m \text{ fin. } u}{17 (1 + m \text{ cof. } u)^{\frac{3}{2}}}$ $= \omega + \frac{\omega^3}{2 \cdot 3}$, &c. si cof. u est positif, ou si cof. u étant négatif, m est $>$ que cof. u pris positivement; & il faudra écrire $\frac{u + m \text{ fin. } u}{17 (1 + m \text{ cof. } u)^{\frac{3}{2}}} = 180^\circ - \omega - \frac{\omega^3}{2 \cdot 3}$, &c. si cof. u étant négatif, m est $<$ cof. u. Delà on tirera la valeur arithmétique de m par approximation (a^4).

15. Si on veut résoudre par un simple tâtonnement arithmétique, le problême de l'art. 10, u étant donné à volonté, on prendra successivement pour m toutes les valeurs possibles depuis 0 jusqu'à 1, ou plutôt un certain nombre de ces valeurs, l'angle DCA, que je nomme Ω, aura pour cosinus $\frac{m + \text{cof. } u}{1 + m \text{ cof. } u}$, & on aura les angles Ω correspondans, lesquels seront $<$ ou $>$ 90°, selon que leur cosinus sera positif ou négatif; on fera ensuite une table qui contiendra les différentes valeurs de $\frac{u + m \text{ fin. } u}{\Omega (1 + m \text{ cof. } u)^{\frac{3}{2}}}$; on cherchera dans cette table les deux valeurs les plus proches de 17, l'une en-dessus, l'autre en-dessous, & la valeur cherchée de m sera entre les

(a^4) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

deux valeurs de m correſpondantes. On la trouvera par les méthodes ordinaires d'approximation & d'interpolation.

16. Pour réſoudre encore plus exactement & plus facilement ce problême, on peut prendre une dixaine de valeurs de u, depuis 10 degrés juſqu'à 170, & une dixaine de valeurs de m depuis 0 juſqu'à 1, correſpondantes à chacune des valeurs de u, ce qui donnera 100 valeurs différentes de $\frac{u+m \text{ ſin. } u}{\alpha(1+m \text{ coſ. } u)^{\frac{3}{2}}}$, par le moyen deſquelles on trouvera facilement celles qui donnent $\frac{u+m \text{ ſin. } u}{\alpha(1+m \text{ coſ. } u)^{\frac{3}{2}}} = 17$, & qui ſont différentes ſelon la valeur qu'on ſuppoſe à u (a^5).

17. Quand on aura connu m, en ſuppoſant u donné à volonté, on aura facilement l'angle BCA (Fig. 49), l'angle de projection HAC, ſon ſinus h, & la viteſſe de projection horiſontale abſolue G'; d'où l'on déduira la viteſſe abſolue de projection $g = \frac{G'}{h}$; & par conſéquent le corps devra être lancé par la main ou par l'inſtrument avec une viteſſe horiſontale $= G' - G$, & avec une viteſſe verticale $= \sqrt{(g^2 - G'^2)} = \frac{G'\sqrt{(1-hh)}}{h}$.

18. Il eſt aiſé de voir par ce qui précede, que l'expreſſion de la viteſſe G' eſt $\frac{\sqrt{M}.\sqrt{(1-m^2)}}{\sqrt{a}.\sqrt{(1+m \text{ coſ. } u)}}$, puiſ-

(a^5) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

que (art. 6) $a(1-mm)=\frac{aagghh}{M}=\frac{aaG'^2}{M}$, & que $a=\frac{a}{1+m\,\text{cof.}\,u}$. A l'égard du finus h de l'angle HAC, on remarquera, pour le trouver plus aifément, que la cotangente de l'angle CAh eft $=\frac{-d(CA)}{CA.d\Omega}$ $=-d\left(\frac{1-mm}{1-m\,\text{cof.}\,\Omega}\right)\times\frac{1+m\,\text{cof.}\,\Omega}{1-mm}\times\frac{1}{d\Omega}$, en prenant m conftant & Ω variable; donc cette cotangente eft $=\frac{m\,\text{fin.}\,\Omega}{1-m\,\text{cof.}\,\Omega}$. Or fin. Ω (art. 12) $=\frac{\text{fin.}\,u\,\sqrt{(1-mm)}}{1+m\,\text{cof.}\,u}$; & cof. Ω (*ibid.*) $=\frac{m+\text{cof.}\,u}{1+m\,\text{cof.}\,u}$; donc fubftituant, on trouve que la cotangente dont il s'agit eft $\frac{m\,\text{fin.}\,u}{\sqrt{(1-mm)}}$, expreffion très-fimple; d'où il s'enfuit que la tangente du complément, c'eft-à-dire, la tangente de l'angle CAh que la ligne de projection forme avec la verticale, eft $\frac{\sqrt{(1-mm)}}{m\,\text{fin.}\,u}$ (a^6).

19. Lorfque le corps A eft lancé fimplement de bas en haut, fuivant AF, nous avons vu ci-deffus qu'il ne devoit pas retomber exactement & rigoureufement au même point, mais que le point A eft en α, lorfque le corps retombe en a. Pour trouver $a\alpha$, on confidérera que le fecteur $AC\alpha$ eft exactement $=ABaC$, & qu'ainfi $c\alpha=\frac{2\,ABaA}{CA}$. Or quand la viteffe de

(a^6) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

projection verticale suivant AF, est très-petite par rapport à la vitesse de rotation de la terre, l'arc Aa est peu considérable, & peut être censé une ligne droite, & la courbe aBA peut aussi être censée une parabole décrite avec la vitesse horisontale initiale $G = \frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$, & la vitesse de projection verticale due à la hauteur k, c'est-à-dire, $\sqrt{\left(\frac{2Mk}{aa}\right)}$. On sait de plus par la théorie des projectiles, que dans ce cas la hauteur BD de la parabole seroit $= k$, & la portée $Aa =$ à deux fois l'espace que le corps parcourroit uniformément avec la vitesse G pendant le temps qu'il employeroit à remonter à la hauteur k, c'est-à-dire, égale deux fois à $\frac{G \times 2k}{\sqrt{\left(\frac{2Mk}{aa}\right)}}$. Donc en substituant pour G sa valeur $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{A}}$, on aura $Aa = \frac{2\sqrt{2}.\sqrt{(ak)}}{17}$; donc l'espace sensiblement parabolique $ABaA = \frac{4k\sqrt{2}.\sqrt{(ak)}}{3.17}$; donc $a\alpha = \frac{8k\sqrt{2}.\sqrt{(ak)}}{3.17\,a} = \frac{8k^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{3.17\sqrt{a}}$, & l'angle $aca = \frac{8k^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{3.17a^{\frac{3}{2}}}$ (a7).

20. Comme les corps pesans parcourent 15 pieds par seconde, le corps tombant de la hauteur k, ou pouvant s'élever à la hauteur k, parcourroit unifor-

(a7) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

mément l'espace $2k$ pendant le temps qu'il mettroit à tomber de cette hauteur k, c'est-à-dire, pendant un temps $= \grave{a}\ \frac{\sqrt{k}\times 1^{\text{sec.}}}{\sqrt{(15^{\text{pieds}})}}$; donc sa vitesse sera $= \frac{2k\sqrt{(15^{\text{pieds}})}}{1^{\text{sec.}}\sqrt{k}}$; donc si on suppose cette vitesse telle qu'il parcourre uniformément l'espace r pendant une seconde, on aura $r = 2\sqrt{k}.\sqrt{(15^{\text{pieds}})}$, & $k = \frac{r^2}{4.15^{\text{pieds}}}$.

21. Donc le rayon de la terre a étant $= 1500$ lieues, ou environ $1500 \times 2500 \times 6$ pieds, on aura, en faisant $r = \mu$ pieds, $aa = \frac{\mu^3 \times 8\sqrt{2}\text{ pieds}}{3.17.4.15.2\sqrt{(15)}.\sqrt{(1500)}\times 50\sqrt{6}} = \frac{\mu^3\text{ pieds}}{3.17.(15)^2.10.50\sqrt{3}}$.

22. Soit $\mu = 900$, c'est-à-dire, supposons que la vitesse verticale avec laquelle le corps est lancé soit telle qu'elle lui fît parcourir uniformément 900 pieds par seconde, on aura $aa = \frac{(900)^3\text{ pieds}}{3.17.(15)^2.10.50\sqrt{3}}$; donc (à cause de $3.17 = 51 = 50(1 + \frac{1}{50})$, & de $\sqrt{3} =$ à peu près $2(1 - \frac{1}{8})$), la valeur de aa sera à peu près $= \frac{81000000}{2\times 50.5.50.50} \times (+\frac{1}{8} - \frac{1}{50}) =$ environ 71 pieds.

23. Si μ étoit double de 900 pieds, c'est-à-dire, de 1800 pieds, la valeur de aa augmenteroit en raison de 2^3 à 1; c'est-à-dire, seroit de 568 pieds ou environ, & ainsi du reste.

24. M. Varignon dit dans la Préface de ses *Conjectures sur la cause de la pesanteur*, que le P. Mersenne &

M. Petit, Intendant des Fortifications, ayant placé un canon bien perpendiculairement, & ayant tiré le boulet en l'air, n'avoient pu ensuite le retrouver, ce qui leur avoit fait croire que le boulet n'étoit pas retombé. Il est cependant évident par ce qu'on vient de dire, qu'en supposant même la vitesse du boulet de 1800 pieds par seconde, & faisant abstraction de la résistance de l'air, il n'auroit dû retomber qu'à 568 pieds environ de l'endroit d'où il avoit été lancé; d'où il s'ensuit que le P. Mersenne & M. Petit n'ont pas bien cherché le boulet, ou l'ont peut-être cherché trop près d'eux, dans la fausse persuasion qu'il auroit dû retomber à peu près au même lieu d'où il étoit parti.

25. On peut résoudre très-simplement, par une méthode analogue à la précédente, le problême de l'article 6, lorsque Aa est d'une petite étendue, & que BD, k, est peu considérable par rapport au rayon de la terre. Pour cela on considérera qu'afin que le corps retombe au même endroit d'où il est lancé, la vitesse absolue de projection horisontale doit être $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} + \gamma'$, γ' étant une quantité fort petite, & que, ABa étant à peu-près une parabole, on aura $ABaCA : ACa$ à très-peu près comme $\frac{2}{3} BD + \frac{AC}{2} : \frac{AC}{2}$, & comme $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} + \gamma'$ à $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{A}}$; d'où il s'ensuit que $\frac{4k}{3} : a :: \gamma' : \frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$; delà on tirera $\gamma' = \frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} \times \frac{4k}{3a}$; donc prenant k à vo-

lonté, pourvu qu'il soit très-petit par rapport à a, le rapport de la vitesse verticale à la vitesse de projection γ' sera celui de $\frac{\sqrt{(2k)}}{a}$ à $\frac{4k}{3.17a\sqrt{a}}$, ou de $\sqrt{a}$ à $\frac{2\sqrt{2}.\sqrt{k}}{3.17}$, ce qui donnera l'angle de projection & la vitesse de projection que la puissance doit imprimer au corps.

26. Puisque le rapport de la vitesse de projection γ, à la vitesse verticale, est $\frac{2\sqrt{2}}{3.17} \times \sqrt{\left(\frac{k}{a}\right)}$, il s'ensuit que cette quantité est la tangente de l'angle que la ligne de projection fait avec la verticale, k étant toujours supposé très-petit par rapport à a. Donc à cause de $k = \frac{r^2}{4.15 \text{ pieds}}$, de $r = \mu$ pieds, & de $a = 1500 \times 2500 \times 6$ pieds, on aura la tangente dont il s'agit, égale à $\frac{\mu}{3\sqrt{3.500.15.17}}$ (a^8).

27. Puisque (art. 19) la quantité αa qui exprime la distance du point de projection au lieu plus occidental où le corps retombe, est $\frac{2.ABaA}{CA}$, on aura rigoureusement & généralement, en employant les noms & les calculs de l'art. 5, $\alpha a = \frac{2a(u + m \text{ sin. } u)\sqrt{(1 - mm)}}{(1 + m \text{ cos. } u)^2} - 2a\Omega$. C'est la formule générale nécessaire pour trouver dans tous les cas le lieu où doit retomber un corps

(a^8) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

lancé

lancé perpendiculairement sous l'équateur avec une vitesse $= \frac{\sqrt{(2Mk)}}{a}$. Cette supposition donnera d'abord la tangente de l'angle $CAO = \frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} \times \frac{a}{\sqrt{(2Mk)}} = \frac{\sqrt{a}}{17\sqrt{(2k)}}$; on a de plus (art. 6) a$(2 - mm) = \frac{aagghh}{M}$, c'est-à-dire, dans le cas présent a$(1 - mm) = \frac{a}{289}$, puisque $gghh = \frac{M}{289a}$. On a encore $\frac{\text{a}(1 - mm)}{1 - \text{cos}. \Omega} = a$, ou $a = \frac{a}{289(1 - m\,\text{cos}. \Omega)}$; & (art. 18) la tangente de l'angle CAO ou $\frac{\sqrt{a}}{17\sqrt{2k}} = \frac{1 - m\,\text{cos}. \Omega}{m\,\text{sin}. \Omega}$; donc $\frac{\sqrt{a}}{17\sqrt{(2k)}} = \frac{1}{(17)^2 m\,\text{sin}. \Omega}$, & $1 - m\,\text{cos}. \Omega = \frac{1}{(17)^2}$; donc $m = \frac{\sqrt{(2k)}}{17\,\text{sin}. \Omega \sqrt{a}}$; & $1 - \frac{\sqrt{(2k)}}{17\sqrt{a}\,\text{tang}. \Omega} = \frac{1}{(17)^2}$; d'où l'on tirera la valeur de tang. Ω. Par ces équations on connoîtra m & Ω, & par conséquent u. Donc on aura $a\alpha$.

28. Si le corps est lancé dans le plan de l'équateur avec une vitesse perpendiculaire $=$ à $\frac{\sqrt{(2Mk)}}{a}$, & une vitesse horisontale $=$ à $\frac{\sqrt{(2M\nu)}}{a}$, sa vitesse horisontale absolue sera $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{(2M\nu)}}{a}$, & on aura pour lors

les valeurs de m & de Ω, en mettant dans les calculs précédens, au lieu de $\frac{\sqrt{a}}{17\sqrt{(2k)}}$, $\frac{\sqrt{a}}{17\sqrt{2k}} + \frac{\sqrt{(2r)}}{\sqrt{2k}}$; & au lieu de $\frac{M}{(17)^2 a}$, $\left(\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{(2Mr)}}{a}\right)^2$; ce qui donnera a $(1 - mm) = \frac{aa}{M} \times \left(\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{(2Mr)}}{a}\right)^2$; $\frac{a(1-mm)}{1-m \operatorname{cof.} \Omega} = a$, & $\frac{\sqrt{a}}{17\sqrt{2k}} + \frac{\sqrt{(2r)}}{\sqrt{2k}} = \frac{1 - m \operatorname{cof.} \Omega}{m \operatorname{fin.} \Omega}$; d'où l'on tirera, pour le cas dont il s'agit, les valeurs de m, Ω & u, on aura donc a $(1 - mm) = \left(\frac{\sqrt{a}}{17} + \sqrt{2r}\right)^2$; $1 - m \operatorname{cof.} \Omega = \frac{\left(\frac{\sqrt{a}}{17} + \sqrt{2r}\right)^2}{a}$; $m = \frac{\sqrt{(2k)}}{a \operatorname{fin.} \Omega} \times \left(\frac{\sqrt{a}}{17} + \sqrt{2r}\right)$; & $a - \frac{\sqrt{(2k)} \times \left(\frac{\sqrt{a}}{17} + \sqrt{2r}\right)}{\operatorname{tang.} \Omega} = \left(\frac{\sqrt{a}}{17} + \sqrt{2r}\right)^2$. Maintenant, dans le temps que le corps parcourt le secteur elliptique $ABaC$, ou $\frac{2.aa}{2}(u + m \operatorname{cof.} u) \times \sqrt{(1-mm)} = \frac{aa(u + m \operatorname{cof.} u)\sqrt{(1-mm)}}{(1 + m \operatorname{cof.} u)^2}$, en vertu de la vitesse horisontale $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{(2Mr)}}{a}$, le point A de la terre parcourra en vertu de la vitesse $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$ un arc que j'appelle $2\Omega' = \frac{2\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} \times \frac{u + m \operatorname{cof.} u}{(1 + m \operatorname{cof.} u)^2} \times \sqrt{(1 - mm)}$

divisé par $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{(2M\nu)}}{a}$. Donc $\alpha\alpha$ sera la différence de cet arc & de l'arc 2Ω.

29. Si les quantités k & ν sont assez petites par rapport au rayon de la terre, le double de l'espace que le corps parcourroit horisontalement avec la vitesse $\frac{\sqrt{(Ma)}}{17a} + \frac{\sqrt{(2M\nu)}}{a}$, pendant le temps qu'il employeroit à remonter à la hauteur k, sera égal (art. 19) à $\frac{2ka}{\sqrt{(2Mk)}} \times \left(\frac{2\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} + \frac{2\sqrt{(2M\nu)}}{a}\right) = 2\sqrt{(2ak)}\left(\frac{1}{17} + \frac{\sqrt{2\nu}}{\sqrt{a}}\right)$, cette quantité que j'appelle λ, étant multipliée (art. 25) par $\frac{a}{2} + \frac{2}{3}k$, & divisée par $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{(2M\nu)}}{a}$ doit être $= \frac{(\lambda + \alpha\alpha)}{\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}} \times \frac{a}{2}$; d'où l'on tire

$$2\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{3}k\right)\frac{\sqrt{(2k)} \times a}{\sqrt{M}} = \frac{(\lambda + \alpha\alpha)\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}}; \text{ \& } \alpha\alpha =$$

$$\frac{2a\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{3}k\right)\sqrt{(2k)}}{\frac{17a^{\frac{3}{2}}}{2}} - \lambda = \frac{4\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{3}k\right)\sqrt{2k}}{17\sqrt{a}} -$$

$$\frac{2\sqrt{(2ak)}}{17} - 4\sqrt{(k\nu)} = \frac{8k\sqrt{2k}}{3 \cdot 17\sqrt{a}} - 4\sqrt{k\nu}.$$ Donc si $\alpha\alpha$ est supposé $= 0$, il faut que $\frac{2k\sqrt{(2k)}}{3 \cdot 17\sqrt{a}} = \sqrt{(k\nu)}$, d'où

l'on tire $\nu = \frac{8k^2}{3^2 . 17^2 . a}$, & $\sqrt{(2M\nu)} = \sqrt{M} \times \frac{4k}{3.17\sqrt{a}}$ = à la valeur de γ' trouvée ci-dessus, art. 25, pour le cas où le corps doit retomber au même point d'où il est parti (a^9).

30. On voit aisément par tout ce qui précede, que pour qu'un corps lancé dans le plan de l'équateur retombe au même point d'où il est parti, il faut nécessairement qu'il ait reçu une impulsion horisontale; cependant il y auroit un cas où le corps pourroit retomber à la même place, sans aucune impression horisontale; ce seroit celui où le secteur elliptique $2BAC$ seroit $= (360^\circ + Aa) \times \frac{aa}{2}$, ce qui donneroit

$$\frac{u + m \text{ fin. } u}{(1 + m \text{ cof. } u)^2} \times \sqrt{(1 - mm)} = \frac{(360^\circ + 2\Omega)}{2} = 180^\circ + \Omega.$$

Or dans ce cas gh étant $= \frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$, on a $a(1 - mm) = \frac{a}{(17)^2}$, ou $\frac{1 - mm}{1 + m \text{ cof. } u} = \frac{1}{(17)^2}$; ou, ce qui est encore plus simple, $1 - m \text{ cof. } \Omega = \frac{1}{(17)^2}$, & $\text{cof. } \Omega = \frac{1}{m} - \frac{1}{17^2 m}$; donc $1 + m \text{ cof. } u = (17)^2 (1 - mm)$; & $\text{fin. } u = \frac{\text{fin. } \Omega}{\sqrt{(1 - mm)}} \times (17)^2 (1 - mm) = (17)^2$ $\text{fin. } \Omega . \sqrt{(1 - mm)}$, d'où il est clair qu'on aura

$$\frac{u + m . (17)^2 \text{ fin. } \Omega \sqrt{(1 - mm)}}{(17)^4 (1 - mm)^2} \times \sqrt{(1 - mm)} = 180^\circ + \Omega.$$

(a^9) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

Or puisque cos. $\Omega = \frac{1}{m} - \frac{1}{17^2 m}$, & que $m = \frac{1 - \frac{1}{17^2}}{\text{cos.}\ \Omega}$, il est visible que m ne pouvant être > 1, cos. Ω ne sauroit être $< 1 - \frac{1}{17^2}$; donc sin. Ω ne peut guère être plus grand que $\frac{\sqrt{2}}{17}$, ou $\sqrt{\left(\frac{2}{289}\right)} = \frac{1}{12 + \frac{1}{48}}$; & les deux valeurs extrêmes de m sont $1 - \frac{1}{17^2}$ qui donne sin. $\Omega = 0$, & 1, qui donne sin. $\Omega =$ environ $\frac{\sqrt{2}}{17}$; d'où l'on voit que sin. Ω, & par conséquent Ω est toujours une assez petite quantité.

31. Soit sin. $\Omega = \alpha$, ce qui donne aussi à peu-près $\Omega = \alpha$, on aura $m = \frac{1 - \frac{1}{17^2}}{\sqrt{(1 - \alpha^2)}} =$ à très-peu-près $1 - \frac{1}{17^2} + \frac{\alpha^2}{2}$; $\sqrt{(1 - mm)} = \sqrt{\left(\frac{2}{(17)^2} - \alpha^2\right)}$; & l'équation pour trouver α sera à très-peu près, $\frac{2\alpha}{(17)^2 \left(\frac{2}{(17)^2} - \alpha^2\right)} = 180^\circ + \alpha$, ou à cause que α est assez petit, on peut supprimer α du second membre. Or si $\alpha = 0$, le premier membre est $= 0$, & si $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{17}$ ce premier membre est infini; donc la solution

eſt toujours poſſible; en prenant une valeur de α moyenne entre ces deux valeurs extrêmes.

32. On voit de plus qu'au lieu de 180° ou de π, (π exprimant le rapport de la demi-circonférence au rayon) on pourroit écrire $\nu\pi$, ν étant un nombre entier poſitif, & que la ſolution ſeroit encore toujours poſſible; en ce cas on auroit ν 360° au lieu de 360°; donc le problême aura une infinité de ſolutions poſſibles, en faiſant ſucceſſivement $\nu =$ à tous les nombres entiers depuis 1 juſqu'à l'infini, & ν ſera le nombre des révolutions que doit faire la terre avant que le corps retombe à la même place, étant lancé perpendiculairement & ſans aucune impulſion horiſontale. Ayant la valeur à peu-près exacte de α ou de Ω par l'équation précédente, il ſera aiſé d'en trouver ſi l'on veut une plus rigoureuſe par le moyen de l'équation

$$\frac{u + m.(17)^2 \text{ fin. } \Omega \sqrt{(1 - mm)}}{(17)^4 (1 - mm)^{\frac{3}{2}}} = 180° + \Omega \quad (a^{10}).$$

33. Nous avons vu ci-deſſus (art. 3), que ſi k' étoit $=$ ou $> a$, la projection étant oblique, le corps ne retomberoit jamais ſur la ſurface de la terre. Or de-là il réſulte un paradoxe ſingulier, c'eſt que le corps A peut être lancé ſeulement dans la direction verticale AF avec une viteſſe telle qu'il ne retombe jamais ſur la ſurface de la terre. Car ſoit $\frac{2Mk}{aa}$ le quarré de cette viteſſe verticale; comme le quarré de la viteſſe hori-

(a^{10}) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

ſontale, que le corps reçoit de la rotation de la terre, eſt $\frac{M}{(17)^2 a}$, il eſt clair que le quarré de la viteſſe abſolue gg ſera $= M\left(\frac{1}{(17)^2 a} + \frac{2k}{aa}\right)$; donc ſi cette quantité eſt $>$ ou $= \frac{2M}{a}$, le corps ne retombera jamais, ce qui donne $k >$ ou $= a - \frac{a}{2.(17)^2}$. En général, il eſt aiſé de voir que, ſi le quarré de la viteſſe verticale eſt $=$ ou $> \frac{2M}{a}$, c'eſt-à-dire, ſi $k =$ ou $> a$; quelque lente que ſoit d'ailleurs ſuppoſée la rotation de la terre, le quarré de gg ſera plus grand que $\frac{2M}{a}$, & par conſéquent le corps ne retombera jamais.

34. Il paroît d'abord réſulter delà une abſurdité, c'eſt que ſi la terre étoit en repos, & que k fût $=$ ou $> a$, le corps ne devroit jamais retomber; quoique le contraire ſoit évident. Mais il faut remarquer que la propoſition avancée, art. 3, que le corps ne doit jamais retomber, ſi $k =$ ou $> a$, ſuppoſe que la viteſſe abſolue de projection ait quelqu'obliquité, ſi petite qu'on voudra. En effet, ſi la viteſſe de projection, par exemple, étoit nulle, en ſorte que le corps tendît directement au centre des forces, on trouveroit par la formule $gg = \frac{2M}{a} - \frac{M}{a}$, que a ſeroit $= 2a$, c'eſt-à-

dire, que le corps devroit décrire une ellipse infiniment allongée dont le point de tendance seroit le foyer, ou, ce qui revient au même, que le corps, après être arrivé en ligne droite au point de tendance, reviendroit ensuite sur ses pas; ce qui est absurde; puisqu'il est évident qu'il doit alors continuer son chemin au-delà de ce même point, en s'en éloignant jusqu'à une distance égale à celle d'où il est parti, & qu'il reviendra ensuite sur ses pas, en faisant les mêmes vibrations; d'où il est clair que la formule $gg = \frac{2M}{a} - \frac{M}{a}$ ne donne le vrai chemin du corps, que dans le cas où la direction de vitesse a quelqu'obliquité, si petite qu'on voudra. Il est vrai que M. Euler, dans sa Méchanique (art. 655), croit qu'un corps qu'on laisseroit tomber directement au point C, lorsque la force centrale est en raison inverse du quarré de la distance, doit revenir sur ses pas quand il est arrivé en C. Mais il est visible que ce grand Géometre s'est trompé sur ce point (a^{11}).

35. Si le corps, au lieu d'être lancé dans le plan de l'équateur, étoit lancé dans le plan d'un autre grand cercle, mais toujours en un point de l'équateur, il est visible qu'à cause de l'impulsion horisontale qu'il auroit nécessairement alors, & qui se combineroit avec le mouvement de la terre, il se mouvroit dans le plan d'un troisiéme grand cercle, qui couperoit l'équateur à 180° du point de départ; d'où il s'ensuit que le corps

(a^{11}) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

ne retombera au point d'où il eſt parti, que dans le cas où il arriveroit à ce point de ſection après une demi-révolution de la terre. Dans ce cas, il eſt aiſé de voir, par ce qui précéde, qu'on auroit $\Omega = 90^\circ$, ou $2\Omega = 180^\circ$, & l'art. 2 de la note (a^6) ſur l'art. 18, fait voir que la ſolution eſt alors poſſible.

36. On a dans ce cas $gghh$, ou $G'G'$, quarré de la viteſſe horiſontale abſolue $= \frac{Ma(1-mm)'}{aa} =$ $\frac{M(1-mm)}{a(1+m\,\text{coſ.}u)} = \frac{M(1-mm)(1-m\,\text{coſ.}\Omega)}{a} =$ $\frac{M(1-mm)}{a}$, puiſque coſ. $\Omega =$ coſ. $90^\circ = 0$; & la tangente de l'angle CAO ſera (note citée, art. 1) $\frac{1}{m}$; d'où connoiſſant la viteſſe horiſontale abſolue, on aura la viteſſe de projection verticale $= \frac{M}{a}(1-mm) \times m^2$. Connoiſſant la viteſſe du point A de l'équateur ſuivant AB (Fig. 51), égale à $\frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$, & la viteſſe horiſontale abſolue ſuivant $AC = \frac{\sqrt{M}.\sqrt{(1-mm)}}{\sqrt{a}}$, il ſera facile, en ſuppoſant l'angle BAC donné, & prenant $\frac{AC}{AB} = 17\sqrt{(1-mm)}$, de trouver la ligne AD parallèle à CB, ſuivant laquelle le corps doit être lancé horiſontalement, & la viteſſe de projection horiſontale ſuivant AD; & il eſt aiſé de voir que ſi AD,

étoit un méridien, l'angle DAB étant alors un angle droit, on auroit la viteſſe ſuivant $AD =$

$$\frac{\sqrt{\left[M\left(1 - mm - \frac{1}{17^2}\right)\right]}}{\sqrt{a}}$$ (a12).

37. Nous avons ſuppoſé juſqu'à préſent que le corps étoit lancé dans l'équateur. Suppoſons préſentement qu'il ſoit lancé ſuivant la tangente d'un parallèle, il eſt évident qu'il tendra à ſe mouvoir dans le plan du grand cercle qui touche le parallèle au point de projection ou de départ; & que l'ellipſe qu'il décrira ſera dans le plan de ce grand cercle. Donc le point où il retombera ſera dans le plan de ce grand cercle, & par conſéquent ne ſera ni à la même longitude, ni à la même latitude que le point d'où il eſt parti, à moins que la viteſſe de projection ne ſoit telle que le corps faſſe ſa révolution dans ſon ellipſe préciſément dans un jour, auquel cas il eſt néceſſaire que la projection verticale ſoit nulle, & que le corps ne ſoit lancé qu'horiſontalement.

38. Si le corps ſe meut dans une direction oblique au parallèle, & dans le plan d'un grand cercle qui faſſe avec le plan du parallèle un angle $= \rho$, ſoit BAG (Fig. 52) cet angle, le point D étant ſuppoſé à l'équateur, & BF le rayon du parallèle; & ſoient 2Ω, 2ω, les angles ou le nombre de degrés correſpondans aux arcs du grand cercle & du parallèle qui ont la même corde

(a12) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

commune, passant par A, & perpendiculaire au plan du méridien DBE; on aura évidemment $\frac{AF}{CF} = \frac{\text{cos.}\,\rho}{\text{sin.}\,\rho}$; sin. $\omega = \frac{\text{sin.}\,\Omega}{BF}$; BF étant le cosinus de la latitude.

39. Maintenant, le temps employé par un point de la terre à parcourir l'arc 2ω du parallèle, est évidemment $\frac{2\omega \times BF}{G \times BF} = \frac{2\omega}{G} = \frac{2\omega . 17\sqrt{a}}{\sqrt{M}}$, & le temps employé par le corps grave à décrire l'arc elliptique qui répond à l'angle 2Ω du grand cercle, est (art. 5), $\frac{2a^2\sqrt{(1-mm)}}{aaG'}(u + m\,\text{sin.}\,u) = 2\sqrt{(1-mm)} \times \frac{1}{(1+m\,\text{cos.}\,u)^2} \times (u + m\,\text{sin.}\,u) \times \frac{\sqrt{(1+m\,\text{cos.}\,u)}.\sqrt{a}}{\sqrt{(1-mm)}.\sqrt{M}}$, en mettant pour G' sa valeur $\frac{\sqrt{M}.\sqrt{(1-mm)}}{\sqrt{a}.\sqrt{(1+m\,\text{cos.}\,u)}}$. Donc pour que les deux temps soient égaux, c'est-à-dire, pour que le corps retombe au même point du parallèle d'où il est parti, il faut que $u + m\,\text{sin.}\,u = 17\omega(1 + m\,\text{cos.}\,u)^{\frac{3}{2}}$, ou $u + m\,\text{sin.}\,u = 17 \times (1 + m\,\text{cos.}\,u)^{\frac{3}{2}}$ $\times$ l'angle dont le sinus est $\frac{\text{sin.}\,\Omega}{BF}$, c'est-à-dire, dont le sinus est $\frac{\text{sin.}\,u\sqrt{(1-mm)}}{(1+m\,\text{cos.}\,u)n}$, en nommant n la donnée BF.

40. On se servira donc de la même construction que dans les art. 9 & 10 ci-dessus, à l'exception qu'on pren-

dra dans cette construction $\frac{\text{sin.}\,u}{n}$ au lieu de sin. u; les conséquences seront d'ailleurs les mêmes, & le problême sera toujours possible; donc, 1°. connoissant par ce moyen l'angle u, & par conséquent l'angle Ω, on aura l'angle ρ par l'équation sin. $\Omega =$
$\sqrt{\left(n^2 - \frac{\text{cos.}\,\rho^2\,(1-n^2)}{\text{sin.}\,\rho^2}\right)}$. 2°. Connoissant l'angle ρ du plan du grand cercle avec celui du parallèle, & la vitesse horisontale absolue initiale G', qu'on vient d'assigner en a, u & m, on aura facilement l'angle de projection, & par conséquent, comme dans l'art. 17 ci-dessus, on en déduira la vitesse de projection qui doit être imprimée au corps, & la direction que doit avoir cette projection, pour que le corps lancé retombe au même point du parallèle d'où il est parti.

41. Ayant ainsi trouvé les deux arcs de cercle 2Ω & 2ω, il ne sera pas difficile de voir que l'angle formé par ces deux arcs, a pour cosinus $\frac{\text{tang.}\,\Omega}{BF\,\text{tang.}\,\omega}$ (a^{13}); d'où l'on déduira aisément, par une méthode analogue à celle des art. 35 & 36, la vitesse de projection, la valeur de cette vitesse, & le plan suivant lequel elle doit être dirigée.

42. Lorsque le corps est lancé perpendiculairement en un point quelconque de la terre, autre qu'un point de l'équateur, avec une vitesse telle que k soit beaucoup plus petit que a; si on nomme ρ' le rayon du

(a^{13}) Voyez les notes à la fin de ce Mémoire.

parallèle, ou plutôt le cosinus de la latitude, la vitesse horisontale du corps sera pour lors $\frac{\rho'\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$, & la différence $a\alpha$ trouvée art. 19, sera $\frac{8\rho'.k^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{3.17\sqrt{a}}$, c'est-à-dire, encore plus petite que dans l'équateur, & plus petite en raison du cosinus de la latitude.

43. Si l'on veut que le corps retombe (au moins à très-peu-près) au même point du parallèle d'où il est parti, k étant toujours beaucoup plus petit que a, il faut d'abord (art. précéd. & art. 25) que sa vitesse de projection horisontale (estimée dans le sens du parallèle) γ soit à la vitesse verticale en raison de $\frac{2\sqrt{2}}{3.17} \times \rho' \times \sqrt{\frac{k}{a}}$ à l'unité. Il faut de plus que le plan de projection (qui est toujours vertical) soit tellement placé que la direction horisontale absolue du corps fasse un petit angle avec la tangente du parallèle.

44. Pour trouver cet angle, on considérera qu'on connoît à peu-près, par ce qui précéde, l'étendue 2Ω de l'arc de grand cercle que le corps doit décrire horisontalement pour retomber sensiblement au même point. Or cet arc très-petit 2Ω devant avoir la même corde que l'arc de parallèle correspondant, & lui étant sensiblement égal, il est aisé de trouver l'angle qu'il fait avec la tangente du parallèle. Cet angle (Fig. 52) en supposant BA très-petit, sera évidemment égal à

très-peu-près à BG divisé par Ω. Or $BG =$ à très-peu-près $\frac{BA \times CF}{CG} = BA \times \sqrt{\left(1 - \frac{\rho'^2}{a^2}\right)}$; & $BA =$ à très-peu-près $\frac{\Omega^2}{2BF} = \frac{\Omega^2}{2\rho'}$. Donc l'angle dont il s'agit est à très-peu-près égal à $\frac{\Omega \times \sqrt{(a^2 - \rho'^2)}}{2\rho' a} = \frac{\Omega}{2a} \times$ cotangente de la latitude.

45. Maintenant soit ω' ce petit angle; la vitesse du point A dans la direction du parallèle (vitesse à laquelle le corps participe sans impulsion primitive) étant $\frac{\rho' \sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$, & la vitesse horisontale absolue du corps, dans la direction du grand cercle, devant être à très-peu-près $\frac{\rho' \sqrt{M}}{17\sqrt{a}} + \gamma$, & γ pouvant être trouvée aisément par les méthodes ci-dessus, il est visible que le corps (pour avoir sa direction primitive absolue dans le plan de ce grand cercle) devra recevoir de la main ou de l'instrument qui le lance; 1°. une vitesse horisontale dans le sens du méridien, ou à très-peu-près, laquelle sera $= \frac{\omega' . \rho' \sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$; 2°. une vitesse horisontale γ dans le sens du grand cercle, c'est-à-dire, dans une direction qui fasse un angle $= \omega'$ avec la tangente du parallèle; 3°. enfin, une vitesse verticale $= \frac{\sqrt{(2Mk)}}{a}$, laquelle vitesse verticale est supposée donnée & à volonté, & sert à déterminer la vitesse γ.

Toutes ces déterminations ne sont pas rigoureusement exactes, mais elles suffisent pour une solution très-approchée. La solution rigoureuse se trouvera par l'art. 41 précédent.

46. Il ne nous reste plus qu'à examiner en peu de mots, ce qui doit arriver à un corps lancé sous le pole, s'il est lancé dans la direction du rayon ou axe de la terre, il retombera toujours, quelle que soit la vitesse, mais il ne retombera jamais, s'il est lancé tant soit peu obliquement avec une vitesse g, telle que g^2 soit $> \frac{2M}{a}$. C'est une suite des art. 32, 33 & 34. Enfin, si g^2 est $< \frac{2M}{a}$ & la direction oblique, le corps retombera, mais non pas au pole, il retombera à quelqu'endroit du méridien dans le plan duquel il aura été lancé, & il sera aisé par les recherches précédentes, de trouver ce point, c'est-à-dire, l'angle Ω, puisque g, h, & a sont donnés; c'est-à-dire, la distance initiale au foyer, la vitesse initiale & sa direction. On aura en effet a $(1 - mm) = \frac{aaggh h}{M}$, $a = \frac{a(1 - mm)}{1 + m \operatorname{cos}\Omega}$, & $\frac{h}{\sqrt{(1 - hh)}} = \frac{1 - m \operatorname{cos}\Omega}{m \operatorname{sin}\Omega}$, d'où l'on tirera a, m & Ω.



NOTES
SUR LES
DÉMONSTRATIONS PRÉCÉDENTES.

Note (a^1), article 7.

LE rapport de la force centrifuge à l'attraction ſous l'équateur, n'eſt pas rigoureuſement $\frac{1}{289}$; mais cette fraction étant un nombre quarré, on s'y eſt arrêté pour la commodité du calcul. On pourra mettre dans les calculs ſuivans, ρ à la place de 289, & $\sqrt{\rho}$ à la place de 17.

Note (a^2), article 8.

On peut remarquer en paſſant que ſi on mène CP perpendiculaire à MG prolongée, on aura auſſi $MP = a(1 + m \text{ coſ. } u)$, d'où il s'enſuit cette propriété de l'ellipſe, que MP eſt toujours $= CA$; ce qui donne un moyen très-facile de conſtruire l'ellipſe par pluſieurs points, en décrivant du foyer C comme centre, & du rayon MP l'arc DA, qui coupe l'ordonnée MN en A.

Note (a^3), article 10.

1. Pour rendre cette ſolution générale encore plus nette

nette & plus facile, nous en donnerons un exemple dans un cas très-simple.

Soit $u = 90^\circ$, on aura a $= a$, & il faudra qu'on ait cette proportion, $90^\circ + m$: angl. sin. $\sqrt{(1 - mm)}$ :: 17 . 1. Pour satisfaire à cette proportion, & trouver la valeur de m qui en résulte, on décrira d'un rayon quelconque QK (Fig. 53) le quart-de-cercle KPS, & la trochoïde KNR dont les ordonnées VN soient égales aux arcs KP; supposant ensuite $QF = QR$, & le cosinus QV de l'arc $KP = m$, (le rayon QK étant $= 1$), on aura $FV = 90^\circ + m$, $VN =$ angl. sin. $\sqrt{(1 - mm)}$. Donc si on prend $QZ = \frac{FQ}{17} = \frac{90^\circ}{17}$, & qu'on tire FZ, cette ligne FZ ira couper la trochoïde en un point N, qui donnera la valeur de $QV = m$. La valeur de m étant connue, on aura celle de G', ou $gh = \frac{\sqrt{M} . \sqrt{\text{a}} . \sqrt{(1 - mm)}}{a} = \frac{\sqrt{M} . \sqrt{(1 - mm)}}{\sqrt{a}}$, dans le cas présent; donc pour que le corps retombe au même point d'où il est parti, la vitesse horisontale de projection imprimée par la main ou par l'instrument, c'est-à-dire, $G' - G$, doit être $= \frac{\sqrt{M} . \sqrt{(1 - mm)}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{M}}{17\sqrt{a}}$ dans le cas présent.

2. Il est de plus évident, que dans ce même cas, ou $CA =$ a $= a$, la tangente en A sera parallèle à GB, puisque le point A est alors le point du milieu

de l'ellipse BAO; d'où il s'ensuit que $h = \sqrt{(1 - mm)}$, & que la vitesse absolue de projection g ou $\frac{G'}{h}$ (art. 8) $= \frac{G'}{\sqrt{(1-mm)}}$; donc la vitesse γ de projection verticale sera telle que $\gamma\gamma = \frac{G'^2}{1-mm} - G'^2 = \frac{G'^2 m^2}{1-m^2} = \frac{Mm^2}{a}$, c'est-à-dire, que la vitesse γ doit être dûe à la hauteur $\frac{am^2}{2}$.

3. Donc en supposant $u = 90°$, il faut pour que le corps retombe au même point d'où il est parti, qu'il soit lancé obliquement, de maniere que l'angle de la ligne de projection avec la verticale, ait pour sinus $\sqrt{(1 - mm)}$, & que la vitesse verticale soit dûe à la hauteur $\frac{am^2}{2}$, m étant donné par la construction exposée ci-dessus.

4. On peut aisément avoir m ou $\sqrt{(1 - mm)}$ par approximation, en considérant que puisque $KP = \frac{90°}{17} + \frac{QV}{17}$, on aura d'abord à très-peu-près $KP = \frac{90° + QK}{17}$; puis nommant α cette premiere valeur de KP, on aura plus exactement $KP = \alpha - \frac{KV}{17} = \alpha - \frac{\alpha^2}{2 \cdot 17}$, & ainsi de suite, selon les méthodes con-

nues ; en général VQ étant $= 1 - \frac{KP^2}{2} + \frac{KP^4}{2.3.4} - \frac{KP^6}{2.3.4.5.6}$, &c. on aura, en nommant KP, z, & faiſant le ſinus total égal à l'unité, & $2\pi =$ au rapport de la circonférence au rayon, l'équation $17z = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^6}{2.3.4.5}$, &c. par le moyen de laquelle on peut trouver l'arc z auſſi exactement qu'on voudra.

5. Quant à l'arc AD, décrit par le point A (Fig. 49 & 50) de la terre, pendant la moitié de la chûte, il aura pour ſinus $\sqrt{(1 - mm)}$, ou le demi-petit axe AN:

Note (a^4), *article 14.*

1. Il ne s'agit plus que de ſavoir laquelle des deux équations de l'article 14 il faut prendre, lorſque u eſt donné ; car quoique u ſoit donné, on ne connoît pas encore m, ni par conſéquent ſi $m +$ coſ. u eſt poſitif ou négatif. Or d'abord il eſt évident, comme nous venons de le dire, que ſi u n'eſt pas plus grand que 90°, il faut prendre la premiere équation, puiſque le coſinus $\frac{m + \text{coſ.}\, u}{1 + m\, \text{coſ.}\, u}$, répondant au ſinus ω ſera pour lors toujours poſitif. En ſecond lieu quand l'angle DCA, ou l'angle dont le ſinus eſt ω ſera $= 90°$, on

aura cos. $u = -m$, & $\frac{u + m \text{ sin. } u}{(1 - mm)^{\frac{3}{2}} \times 90^\circ} = 17$. En troisiéme lieu, puisque $m +$ cos. u est positif tant que cos. u, quoique négatif, n'est pas assez grand pour surpasser m, il est clair que quand $m +$ cos. u devient $= 0$, c'est-à-dire, quand l'angle $DCA = 90^\circ$, cette quantité $m +$ cos. u a toujours été positive auparavant, & par conséquent aussi le cosinus $\frac{m + \text{cos. } u}{1 + m \text{ cos. } u}$ de l'angle DCA. Or ce cosinus, après avoir été positif, & avoir passé par zero, doit ensuite devenir négatif; d'où l'on peut conclure qu'on doit employer la premiere équation, tant que la valeur supposée de u ne sera pas plus grande que celle qui satisfait à l'équation $\frac{u + m \text{ sin. } u}{(1 - mm)^{\frac{3}{2}} \times 90^\circ} = 17$; & qu'ensuite il faudra prendre la seconde équation.

Note (a^5), *article 16.*

On doit remarquer que dans la trajectoire elliptique l'angle CAH (Fig. 49) est obtus, ou du moins ne peut être plus petit qu'un angle droit, & qu'il n'est même égal à un angle droit, qu'aux points B & O (Fig. 50), ce qui se prouve par la valeur $a(1 + m \text{ cos. } u)$ du rayon vecteur, dont la différence n'est $= 0$, que quand sin. $u = 0$. Or il est toujours nécessaire que l'angle CAH soit obtus, ou du moins ne soit pas $< 90^\circ$, afin que le projectile puisse se mouvoir, ou

en s'élevant au-dessus de la surface de la terre, ou tout au moins en rasant cette surface.

Si la vitesse de projection horisontale est en sens contraire de la vitesse de la terre, & qu'elle lui soit égale, alors $G'-G=0$, & le corps décrit une ligne droite. Si $G'-G$ est négatif, alors le point a (Fig. 49) tombera de l'autre côté de A; ce qu'il est inutile d'expliquer plus au long.

Note (a^6), *article 18.*

1. Puisque $\frac{\text{sin.}\, u \sqrt{(1-mm)}}{1+m \,\text{cos.}\, u} = \text{sin.}\, \Omega$, & que $\frac{m+\text{cos.}\, u}{1+m\,\text{cos.}\, u} = \text{cos.}\,\Omega$; il s'ensuit que $\text{cos.}\, u = \frac{m-\text{cos.}\,\Omega}{m\,\text{cos.}\,\Omega - 1}$ ou $\frac{\text{cos.}\,\Omega - m}{1-m\,\text{cos.}\,\Omega}$; d'où $1+m\,\text{cos.}\, u = \frac{1-mm}{1-m\,\text{cos.}\,\Omega}$, & $\text{sin.}\, u = \frac{\text{sin.}\,\Omega}{\sqrt{(1-mm)}} \times (1+m\,\text{cos.}\, u) = \frac{\text{sin.}\,\Omega \sqrt{(1-mm)}}{1-m\,\text{cos.}\,\Omega}$. C'est pourquoi, au lieu de l'équation $\frac{u+m\,\text{sin.}\, u}{\Omega(1+m\,\text{cos.}\, u)^{\frac{3}{2}}} = 17$, de l'article 16, on peut écrire $\frac{u\times(1-m\,\text{cos.}\,\Omega)^{\frac{3}{2}}}{\Omega(1-mm)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m\,\text{sin.}\,\Omega(1-m\,\text{cos.}\,\Omega)^{\frac{1}{2}}}{\Omega(1-mm)} = 17$, en prenant Ω pour l'inconnue, & u pour l'angle dont le sinus est $\frac{\text{sin.}\,\Omega\sqrt{(1-mm)}}{1-m\,\text{cos.}\,\Omega}$. On auroit aussi dans cette hypo-

thèse $G' = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{a}} \times \sqrt{(1 - m \operatorname{cof.} \Omega)}$, & la tangente de l'angle $CAh = \frac{1 - m \operatorname{cof.} \Omega}{m \operatorname{fin.} \Omega}$.

2. Si on suppose $\Omega = 90^\circ$, on aura fin. $u = \sqrt{(1 - mm)}$ & $\frac{u}{90^\circ (1 - mm)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m}{90^\circ (1 - mm)} = 17$.

Il y a donc, lorsque $\Omega = 90^\circ$, une valeur de m qui peut résoudre le problême, puisqu'en faisant $m = 0$, le premier membre est < 17, & qu'il est infiniment grand si $m = 1$. Cette remarque nous sera utile dans la suite de ces recherches. Voyez art. 34.

3. Il peut y avoir de l'avantage à prendre l'angle Ω pour donné au lieu de l'angle u, parce que cet angle Ω, ou plutôt son double 2Ω, exprime le temps que le corps lancé met à retomber sur la terre au même point où il est parti. Dans ce cas, m sera toujours l'inconnue qu'il faudra déterminer par quelqu'une des méthodes indiquées ci-dessus.

4. On peut remarquer en passant que l'expression $\frac{\operatorname{fin.} \Omega \sqrt{(1 - mm)}}{1 - m \operatorname{cof.} \Omega}$ du sinus de l'angle u n'est jamais > 1, (pris positivement ou négativement) comme en effet elle ne doit jamais l'être; car si elle l'étoit, on auroit $(\operatorname{fin.} \Omega)^2 (1 - mm) > 1 - 2m \operatorname{cof.} \Omega + m^2 \operatorname{cof.} \Omega^2$, ou $0 > m + 2 - 2m \operatorname{cof.} \Omega + \operatorname{cof.} \Omega^2$, c'est-à-dire, $0 > (m - \operatorname{cof.} \Omega)^2$, ce qui ne se peut, $(m - \operatorname{cof.} \Omega)^2$ étant un quarré, & par conséquent toujours positif. On verra

de même que l'expression $\frac{\text{sin. } u \sqrt{(1 - mm)}}{1 + m \text{ cos. } u}$ du sinus de l'angle Ω n'est jamais plus grande que 1, pris positivement ou négativement.

Note (a^7), *article 19.*

1. On peut remarquer que AD ou $\frac{Aa}{2}$ étant $= \frac{\sqrt{(2ak)}}{17}$, on aura $\frac{AD^2}{2a}$, ou la fleche de l'arc $AD = \frac{k}{17}$. Ainsi cette fleche est assez petite par rapport à BD ou k; cependant, quand on voudroit regarder BD ou k comme comparable à cette fleche, & ADa comme un petit arc de cercle, l'espace $ABDa$ formé par la parabole ABa, & l'arc ADa n'en seroit pas moins censé égal à $ADa \times \frac{2BD}{3}$, attendu que le segment circulaire ADa est lui-même sensiblement égal à $ADa \times \frac{2}{3}$ de la fleche Dd. Il faut observer encore que la hauteur BD à laquelle le corps s'éleve en vertu de la vitesse de projection verticale est un peu plus grande que si la rotation de la terre étoit nulle; en sorte que la vitesse de projection verticale dûe à la hauteur k, n'est pas exactement $\sqrt{\left(\frac{2Mk}{aa}\right)}$, mais $\sqrt{(2k)} \times \sqrt{\left(\frac{M}{aa} - \frac{M}{289 aa}\right)}$, l'effet de la pesanteur $\frac{M}{aa}$ étant

diminué par la force centrifuge $\frac{M}{289aa}$; ce qui donnera une valeur de aa un peu différente de celle que nous avons trouvée; mais la différence sera très-petite & comme insensible. En général, pour avoir la valeur de aa avec toute l'exactitude qu'on peut desirer, on substituera pour G, la quantité $\frac{\sqrt{M}}{a\sqrt{\rho}}$, ρ étant le rapport de la force centrifuge sous l'équateur à la pesanteur ou attraction primitive $\frac{M}{aa}$; & au lieu de $\sqrt{\left(\frac{2Mk}{aa}\right)}$, on écrira $\frac{2\sqrt{(Mk)}}{a}\times\sqrt{\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}$; ρ étant à très-peu-près égal à $288\frac{1}{2}$; après quoi on achevera facilement le reste du calcul.

2. J'ajouterai encore que comme la terre n'est pas exactement sphérique, la quantité $\frac{M}{aa}$ n'exprime pas exactement la pesanteur primitive sous l'équateur, & qu'ainsi au lieu de $\frac{M}{aa}$ & de $\frac{\sqrt{M}}{a}$, il faudroit mettre $\frac{M\lambda}{aa}$, & $\frac{\sqrt{(M\lambda)}}{a}$, λ étant une quantité très-peu différente de l'unité. Cette quantité λ disparoîtra dans la valeur de aa, mais il faudra avoir soin, si on veut avoir une solution rigoureusement exacte à cet égard, de prendre pour k la valeur qui convient à la vitesse de projection, eu égard à la pesanteur sous l'équateur, & au-lieu de 15 pieds par seconde, qu'on suppose parcourus

courus par les corps pesans, il faut prendre l'espace réel & exact que les corps pesans parcourent sous l'équateur durant l'espace d'une seconde. Au reste, toutes ces considérations apporteront peu de changement à la valeur de $a\alpha$ que nous avons donnée.

3. Si on avoit quelque scrupule sur la supposition que nous avons faite de $BD =$ à très-peu-près à k, on pourra le lever aisément par la considération suivante. Soit $a = 1$, $CB = x$, & au point B sommet de l'ellipse, on aura par la théorie connue des trajectoires $\frac{1}{h^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{2M}{xgghh} - \frac{2M}{gghh} = 0$. (Voyez nos *Recherches sur le Systême du Monde*, pag. 16, art. 8.) Maintenant soit $x = 1 + t$, $h^2 = 1 - \alpha$, t étant une quantité fort petite, ainsi que α, cette équation se changera à très-peu-près en $\alpha + 2t - \frac{2Mt}{gg} = 0$; or il est aisé de voir que $\alpha =$ à très-peu-près $\frac{2pk}{gg} =$ à très-peu-près $\frac{2pk.289}{pa}$, & que $M = paa = p$, à cause de $a = 1$; d'où l'on voit que $2k.289 + 2t - \frac{2pt.289}{p} = 0$. Donc $t =$ à très-peu-près k.

Si on vouloit trouver la valeur de t plus rigoureusement, il est clair qu'on le pourroit facilement au moyen de l'équation rigoureuse $\frac{1}{h^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{2M}{xgghh}$

$-\frac{2M}{gghh}=0$. Mais le calcul précédent suffit pour nous donner la valeur approchée de t qui nous est nécessaire, & pour prouver que cette valeur est sensiblement égale à k. Ceux qui voudront résoudre plus exactement le problême dont il s'agit ici, par les valeurs rigoureuses de BD & de αa, le pourront aisément au moyen de toutes les remarques précédentes.

Note (a^8), *article* 22.

1. Si dans la proportion de l'art. 6, l'angle u est supposé fort petit, on aura à très-peu-près $\frac{u+mu}{(1+m)^{\frac{3}{2}}}$: $\frac{u\sqrt{(1-mm)}}{1+m}$ :: 17 . 1, ou à très-peu-près $17\sqrt{(1-mm)} = (1+m)^{\frac{3}{2}}$, ou $17\sqrt{(1-m)}=1$; d'où l'on voit que $m = 1-\frac{1}{289}$; & que $1-mm$ est à peu près $=\frac{2}{289}$; & le demi-petit axe $a\sqrt{(1-mm)}=$ à très-peu-près $\frac{a}{12}$, ou plus exactement $\frac{a}{\sqrt{(144\frac{1}{2})}}$: $\frac{a}{12+\frac{1}{48}}$.

2. On peut aisément trouver la valeur de m par une approximation plus exacte, en mettant au lieu de fin. u & angl. fin. $\left(\frac{u\sqrt{(1-mm)}}{1+m \text{ cof. } u}\right)$ leurs valeurs en u dans la proportion $u+m$ fin. $u:(1+m\text{cof. } u)^{\frac{3}{2}}$: angl. fin. $\left(\frac{u\sqrt{(1-mm)}}{1+m\text{ cof. } u}\right)$ :: 17 : 1, ce qui est toujours

facile quand u eſt ſuppoſé peu conſidérable, puiſque ſin. u eſt alors $= u - \frac{u^3}{2.3} + \frac{u^5}{2.3.4.5}$, &c. & angl. $\left(\frac{\text{ſin.}\, u \sqrt{(1 - mm)}}{1 + m \,\text{coſ.}\, u}\right) = \frac{\text{ſin.}\, u \sqrt{(1 - mm)}}{1 + m \,\text{coſ.}\, u} + \frac{\text{ſin.}\, u^3 (1 - mm)^{\frac{3}{2}}}{2.3(1 + m \,\text{coſ.}\, u)^3}$, &c. le calcul en eſt plus long que difficile. Mais on voit aiſément par ce même calcul que u étant fort petit, & par conſéquent Ω fort petit, m ne ſauroit avoir qu'une valeur à peu-près égale à l'unité; & comme le demi-grand axe a reſte arbitraire, on voit que le problême a une infinité de ſolutions; en ſorte qu'on peut tracer une infinité d'ellipſes dans leſquelles $1 - mm = \frac{2}{289}$, & qui, en faiſant le rayon $r = d =$ au rayon de la terre, donneront l'angle Ω, & par conſéquent l'angle u. Cependant il faut remarquer que cette ſolution ſuppoſe que non-ſeulement l'angle Ω ſoit très-petit, mais auſſi l'angle u. Or l'angle Ω pourroit être fort petit ſans que l'angle u le fût; car on a (note a^6) ſin. $u =$ ſin. $\Omega \times \frac{\sqrt{(1 - mm)}}{1 - m \,\text{coſ.}\, \Omega}$; ſoit $m = 1 - \alpha$, & coſ. $\Omega = 1 - \frac{\Omega^2}{2}$ à très-peu-près, en ſuppoſant Ω très-petit, on aura ſin. $u =$ (à très-peu-près) $\frac{\text{ſin.}\, \Omega \sqrt{(2\alpha - \alpha^2)}}{\frac{\Omega^2}{2} + \alpha}$, quantité qui n'eſt très-petite (Ω étant déja très-petit) que dans le cas où α eſt beau-

coup plus grand que $\frac{\Omega^2}{2}$. Nous reviendrons dans un moment sur ce sujet; mais nous observerons ici que dans le cas où u sera très-petit, deux valeurs de u, toutes deux très-petites, mais très-différentes, donnent deux valeurs très-différentes de Ω, puisque ces valeurs sont à très-peu-près proportionnelles aux valeurs de u, sin. Ω étant $= \frac{\text{sin. } u \sqrt{(1-mm)}}{1+m \text{ cos. } u} =$ à très-peu-près $\frac{\text{sin. } u \sqrt{(1-m^2)}}{1+m}$, lorsque u est fort petit.

3. Donc réciproquement une même valeur de Ω supposée très-petite, ne sauroit donner deux valeurs de u très-petites & très-différentes.

4. Donc lorsque le corps est lancé avec une vitesse de projection très-petite par rapport à la vitesse de rotation de la terre, il n'y a qu'une seule projection & direction à lui donner, pour qu'il retombe dans un temps donné au même point d'où il est parti. Mais si le temps n'est pas donné, il est clair qu'on peut imprimer au corps une infinité de vitesses & de directions différentes pour le faire tomber au même point, dans le cas même où Ω & u seront fort petits l'un & l'autre; & dans le cas où Ω & u ne seroient pas très-petits, ou dans lequel Ω seulement seroit très-petit, on aura encore une infinité de solutions; puisque u étant pris à volonté, on aura toujours une valeur correspondante de m.

5. On a trouvé ci-deſſus (art. 19 & ſuiv.) $Aa = \frac{2\sqrt{2}.\sqrt{(ak)}}{17}$, $k = \frac{\mu^2 \text{ pieds}}{4 \times 15}$; $a = 1500 \times 2500 \times 6$ pieds; d'où il s'enſuit que $Aa = \frac{2\sqrt{2}.\mu.10.50.\sqrt{6}}{2.17} = \frac{2\mu.500.\sqrt{3} \text{ pieds}}{17}$. Or la circonférence de la terre eſt d'environ 9000 lieues $= 9000 \times 2500 \times 6$ pieds. Donc le rapport de Aa à 360° ſera celui de $\frac{2\mu.500.\sqrt{3}}{17}$ à $9000.2500.6$, ou de $\frac{\mu}{5.9000.17\sqrt{3}}$ à 1. Donc ſi $\mu = 1800$ (ce qui eſt à peu-près la plus grande valeur poſſible de μ) ce rapport ſera celui de $\frac{1}{25.17\sqrt{3}}$ à 1. Ainſi lorſque le corps ſera lancé perpendiculairement ſous l'équateur, la plus grande valeur de Aa ſera de $\frac{360°}{25.17\sqrt{3}}$, c'eſt-à-dire, ne ſera pas d'un demi-degré.

6. Le rayon r de l'ellipſe décrite par le corps grave étant $\frac{a(1-mm)}{1-m\cos.\Omega}$; il eſt clair que ſi l'angle Ω eſt ſuppoſé peu conſidérable, on aura $\cos.\Omega = 1 - \frac{\Omega^2}{2}$ à très-peu-près; de plus, ſoit $m = 1 - \alpha$, α étant fort petit, on aura $r = \frac{a(2\alpha - \alpha\alpha)}{\alpha + \frac{(1-\alpha)\Omega^2}{2}}$, & ſi Ω^2 eſt beaucoup plus petit que α, on aura l'aire du ſecteur ellip-

tique $\int \frac{rrd\Omega}{2}$ = à très-peu-près à l'intégrale de $\left[\frac{a^2 d\Omega}{2} \times (2\alpha - \alpha\alpha)^2 \times \frac{1}{\alpha^2} \times \left(1 - \frac{\Omega^2}{\alpha}\right)\right]$; intégrale facile à trouver, & par le moyen de laquelle on déterminera avec toute la précision qu'on peut desirer, la valeur de l'espace *ABaDA*.

7. Il est visible que Ω étant supposé fort petit, ainsi que α, Ω^2 sera considérablement $< \alpha$, si Ω est de l'ordre de α ou au-dessus.

8. Lorsque $\Omega = 0$, on a $r = a(1+m) = a(2-\alpha)$; & tant que Ω^2 est beaucoup $< \alpha$, on a $r =$ à très-peu-près $\frac{a(2\alpha - \alpha\alpha)}{\alpha\left(1+\frac{\Omega^2}{2\alpha}\right)} = a(2-\alpha) \times \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\alpha}\right)$; c'est pourquoi la différence des rayons qui répondent à l'angle $\Omega = 0$, & à l'angle Ω supposé très-petit, sera à très-peu-près $\frac{a\Omega^2}{\alpha}$, & comme l'ordonnée correspondante est $a\Omega$ à très-peu-près, ou $2a\Omega$ à très-peu-près, on voit que le rapport de l'abscisse (prise depuis le sommet de l'ellipse) à l'ordonnée correspondante, est à peu-près celui de Ω à 2α.

9. De-là il résulte que si l'abscisse prise depuis le sommet, est beaucoup plus petite que l'ordonnée correspondante, ou n'est pas beaucoup plus grande, on pourra supposer Ω^2 très-petit par rapport à α, & par conséquent employer la méthode qu'on vient d'indiquer pour

trouver l'espace $ABaDA$ avec toute la précision dont on peut avoir besoin.

10. On peut encore, si l'on veut, s'y prendre autrement pour trouver l'espace $ABaDA$; en considérant, que si c est le demi-petit axe, y, l'ordonnée, & x l'abscisse prise depuis le sommet, on aura $y = \frac{c}{a}\sqrt{(2ax - xx)} = \frac{c}{a} \times \left(\sqrt{2ax} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{(2a)}}\right)$; d'où l'on trouvera facilement l'intégrale $\int y\,dx = \frac{c}{a} \times \left(\frac{2}{3}.Bd.AD - \frac{1}{5} \times \frac{AD^5}{8a^3}\right)$; or l'espace $ADd =$ à très-peu-près $\frac{2}{3}Dd \times AD - \frac{1}{5} \times \frac{AD^5}{8a^3}$, donc, &c.

11. Si dans l'art. 1 de la note (a^6) on suppose Ω si petit, que cos. Ω puisse être supposé $= 1$, on aura en mettant pour u sa valeur approchée $\frac{\Omega\sqrt{(1 - mm)}}{1 - m}$, l'équation $\frac{(1-m)^{\frac{3}{2}}}{1-mm} + \frac{m(1-m)^{\frac{3}{2}}}{1-mm} = 17$; d'où l'on tire, comme dans l'article 1 de la présente note, $17\sqrt{(1-m)} = 1$.

12. Et si on suppose Ω très-petit, mais de manière que cos. Ω ne puisse pas être supposé $= 1$ dans la quantité $1 - m$ cos. Ω, alors faisant $1 - m = \alpha$, comme ci-dessus, on aura $1 - m$ cos. $\Omega =$ à très-peu-près $1 - (1 - \alpha)\left(1 - \frac{\Omega^2}{2}\right)$

$= a + \frac{\Omega^2}{2}$, $u =$ à l'angle dont le sinus est $\frac{\text{sin.}\,\Omega.2a}{a + \frac{\Omega^2}{2}} = \frac{2\,\text{sin.}\,\Omega}{1 + \frac{\Omega^2}{2a}}$, & l'équation sera à très-peu-près

$$\frac{u\,(a + \Omega^2)^{\frac{3}{2}}}{\Omega.(2a)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\text{sin.}\,\Omega\left(a + \frac{\Omega^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\Omega(2a)} = 17.$$

Note (a^9), *article* 22.

1. Il résulte des calculs de l'art. 28, que si $\nu = 0$, on aura, en regardant Ω comme fort petit, $\Omega =$ à très-peu-près $\frac{\sqrt{(2k)}}{17\sqrt{a}}$, divisé par $\left(1 - \frac{1}{289}\right)$; d'où $\Omega^2 = \frac{2k}{289.a}$ à très-peu-près; les mêmes formules de l'art. 28, donnent $m = 1 - \frac{1}{289}$; & par conséquent $\alpha = \frac{1}{289}$; & le demi-petit axe $a\sqrt{(1 - mm)} = \frac{a}{12 + \frac{1}{48}}$; d'où il est clair que k étant toujours beaucoup plus petit que a, la valeur de Ω^2 est considérablement plus petite que celle de a; en effet, la plus grande valeur de k, suivant l'expérience, (note (a^8) art. 5) est environ $= \frac{(1800)^2\ \text{pieds}}{2.4.15} = 54000$ pieds; & celle de a est de $1500 \times 2500 \times 6$ pieds; or ces deux valeurs sont entr'elles comme 9 à 150×25, ou comme 3 à 1250. Ainsi on pourra

pourra faire uſage des calculs indiqués dans la note précédente, lorſque $\nu = 0$.

2. Puiſque ſin. $u = \frac{\text{ſin. } \Omega \sqrt{(1 - mm)}}{1 - m \text{ coſ. } \Omega}$, on aura ſin. u $=$ à très-peu-près $\frac{\text{ſin. } \Omega \sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}}{\alpha + \frac{(1-\alpha) \text{ ſin. } \Omega^2}{2}}$, ou $\frac{\sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}}{\alpha} \times$ $\left[\text{ſin. } \Omega - \frac{\text{ſin. } \Omega^3}{2\alpha}\right]$; on aura de même fort aiſément les valeurs approchées de coſ. $u = \frac{\text{coſ. } \Omega - m}{1 - m \text{ coſ. } \Omega}$, & de $1 + m$ coſ. $u = \frac{1 - mm}{1 - m \text{ coſ. } \Omega}$; d'où il ſera aiſé de tirer la valeur auſſi approchée qu'on voudra, de l'angle que nous avons nommé $2\Omega'$ dans l'art. 28, & qui eſt proportionnel au ſecteur elliptique, ou à peu-près parabolique *ABaDA*. Je me contente d'indiquer ces calculs à cauſe de leur facilité, les réſultats que nous avons donnés, art. 29, ſuffiſant d'ailleurs pour les cas ordinaires.

3. Si le corps eſt lancé horiſontalement ſous l'équateur avec une viteſſe abſolue g, telle que $g^2 = \frac{2M}{a} - \frac{M}{a}$, il décrira une ellipſe dont le grand axe ſera $2a$, le petit axe $2a\sqrt{(1 - mm)}$, le demi-paramètre p ou $a(1 - mm) = \frac{2aaM}{aM} - \frac{Maa}{Ma} = 2a - \frac{aa}{a}$; or pour que le corps revienne au même point de la terre d'où

il a été lancé, il faut que g soit à G comme l'aire de l'ellipse à l'aire du cercle dont le rayon est a, c'est-à-dire, comme $\mathrm{a}^2\sqrt{(1-mm)}$ à a^2; on aura donc g^2 : $G^2::\mathrm{a}^4(1-mm):a^4$, c'est-à-dire, $\frac{2}{a}-\frac{1}{\mathrm{a}}:\frac{1}{(17)^2 a}::$ $\mathrm{a}^3\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{\mathrm{a}}\right):a^2$; donc $\mathrm{a}^3=(17)^2a^3$, d'où l'on tire aisément la vitesse g, & par conséquent la vitesse de projection $g-G$, qu'il faudroit imprimer horisontalement au corps, pour qu'après un jour révolu, il revînt au même point de la terre d'où il est parti.

4. Si l'on fait $g:G::\mathrm{a}^2\sqrt{(1-mm)}:aa\times k$, k exprimant un nombre entier quelconque, on aura $\mathrm{a}^3=(17)^2a^3k^2$; la terre fera k révolutions pendant que le corps en fera une; & au bout de ce temps, le corps reviendra au point d'où il est parti.

5. Il faut remarquer que a ne doit pas être $<a$, autrement le grand diametre $2\mathrm{a}$ de l'ellipse seroit plus petit que le diametre $2a$ de la terre, & le corps ne pourroit réellement décrire cette ellipse, à cause de la solidité de la terre qui s'y opposeroit. Or dans le cas présent où k est >1, il est clair que a^3 étant $=17^2a^3k^2$, on a $\mathrm{a}>a$.

6. Si k est une fraction $=\frac{p}{q}$, p étant $<q$, alors, 1°. pour avoir les points où le corps & la terre se rencontreront, il faut considérer que la terre fera une partie $\frac{p}{q}$ de sa révolution pendant que le corps en fera une;

2°. que a^3 doit être au moins égal à a^3, d'où il s'enſuit que $17^2 k^2$ ne doit pas être < 1, & $k < \frac{1}{17}$. Si $k = \frac{1}{17}$, on aura $\mathrm{a} = \mathrm{a}$, le corps raſera alors continuellement la ſurface de la terre, en décrivant un cercle, & en ne preſſant point la ſurface, parce que ſa force centrifuge détruira l'effet de la peſanteur ; la terre fera $\frac{1}{17}$ de révolution pendant que le corps en fera une, & le corps reviendra au point d'où il eſt parti, après avoir parcouru un arc α, tel que $\alpha - \frac{\alpha}{17} = 360^\circ$ pris tel nombre de fois qu'on voudra ; la plus petite valeur de α ſera $\frac{360^\circ . 17}{16}$; la ſeconde ſera double de celle-là, la troiſiéme, triple, &c.

7. Si $k > \frac{1}{17}$, mais $= \frac{p}{q}$, p étant $<$ ou $> q$, le corps fera dans ſon ellipſe q révolutions pendant que la terre en fera p, & le corps ne ſe retrouvera qu'au bout de ce temps au même point d'où il étoit parti ; mais il retombera ſur la terre au bout d'une révolution, ſur un point différent de celui d'où il a été lancé. Ce point ſera plus oriental, ſi q eſt $> p$, & ſi $360 \left(1 - \frac{p}{q}\right)$ eſt < 180 ; & plus occidental ſi q étant $> p$, on a $360 \left(1 - \frac{p}{q}\right) > 180$; il ſera plus occidental, ſi q eſt $< p$, & $360 \left(\frac{p}{q} - 1\right) < n . 360 + 180$, n étant un nombre entier poſitif, en y comprenant zero ; &

plus oriental, si q étant $<p$, on a $360\left(\frac{p}{q}-1\right)>$ $n.360+180$.

8. Si $17k$ est <1, alors le corps ne pouvant décrire une ellipse, à cause de la solidité de la terre, décrira un cercle en rasant la terre, avec une vitesse uniforme $=g=\sqrt{\left(\frac{2M}{a}-\frac{M}{a}\right)}=\sqrt{\frac{M}{a}}\times\sqrt{\left(2-\frac{1}{(17k)^{\frac{2}{5}}}\right)}$, & il pressera la terre avec l'excès de sa pesanteur sur la force centrifuge, c'est-à-dire, avec une force $=\frac{M}{aa}-\frac{2M}{aa}+\frac{M}{aa}=\frac{M}{aa}-\frac{M}{aa}$.

9. Il faut remarquer encore que l'expression de g, savoir $\sqrt{\left(\frac{2M}{a}-\frac{M}{a}\right)}$, ne permet pas que $2a$ soit $<a$, puisqu'alors g seroit imaginaire; ainsi dans ce cas même où k est $<\frac{1}{17}$, on ne sauroit supposer k telle que $2\sqrt[3]{[(17)^2k^2]}$, soit <1; donc 17^2k^2 ne sauroit être $<\frac{1}{8}$, & $k<\frac{1}{2.17\sqrt{2}}$.

10. Dans ce dernier cas, $g:G::\sqrt{\left(2-\frac{1}{(17k)^{\frac{2}{3}}}\right)}:\frac{1}{17}$, & si g est $>G$, le corps lancé ne retrouvera le point d'où il est parti, qu'après avoir parcouru un arc α, tel que $\alpha-\frac{G\alpha}{g}=360^\circ$, pris tant de fois qu'on

voudra. Si $G=g$, le corps reftera toujours au même point de la terre, parce qu'alors $\alpha - \frac{G\alpha}{g} = 0$. Enfin fi $G>g$, il faudra que $\frac{Ga}{g} - \alpha = 360$ pris tant de fois qu'on voudra.

11. On voit aifément que dans le cas préfent, où $17k$ eft <1, on a $\sqrt{\left(2 - \frac{1}{(17k)^{\frac{1}{2}}}\right)} < 1$; & qu'ainfi $\frac{g}{G} < 17$; mais $\frac{g}{G}$ peut être beaucoup moindre que 17, & même $=$ ou prefque $=0$ fi $2 - \frac{1}{(17k)^{\frac{1}{2}}}$ eft $=0$ ou fort petit.

Note (a^{10}), *article* 44.

1. En général, fi dans le problême de l'art. 6, on vouloit que le corps grave *A* retombât au point *a*, non pas après que le point *A* de la terre auroit décrit l'arc *Aa*, mais après qu'il auroit décrit l'arc $Aa + 360$, ou en général $Aa + p \cdot 360°$, *p* étant un nombre entier pofitif, ce qui dans tous les cas feroit retomber le corps grave au même point, on auroit dans la proportion de l'art. 8, $(1+m \text{ cof. } u)^{\frac{3}{2}} \times (p \cdot 360 + \Omega)$, au lieu du fecond terme de cette proportion, lequel eft égal à $(1+m \text{ cof. } u)^{\frac{3}{2}} \Omega$; & les ordonnées de la courbe qui fert à trouver *m* (voyez ce même art. 8),

feroient augmentées de la quantité $(1 - m \text{ cof. } u)^{\frac{1}{2}} \times p.360°$, en forte que la derniere ordonnée (répondante à $m = 1$), au lieu d'être égale à zero comme dans l'art. 9, feroit égale à $(1 - m \text{ cof. } u)^{\frac{1}{2}} \times p \times 360°$. Donc fi cette ordonnée prife 17 fois eft plus petite que l'abfciffe correfpondante $u + \text{fin. } u$, l'angle u étant fuppofé donné, la folution fera toujours poffible. On voit de plus, par les art. 30 & 31, que dans le cas dont il s'agit ici, la folution eft toujours poffible, en fuppofant même que le corps foit lancé verticalement, fans aucune impulfion horifontale, pourvu qu'il le foit avec la viteffe convenable.

2. Donc en général ayant trouvé (art. 10) l'angle u & la quantité m correfpondante, qui doivent faire retomber le corps au même point, après que le point A aura décrit l'arc $Aa = 2\Omega$, on trouvera de même & par une méthode analogue, lorfque la chofe fera poffible, quelle eft la viteffe de projection néceffaire pour faire retomber le corps au même point après que le point A de la terre aura décrit l'arc $2\Omega + p.360°$, & on peut, fous ce point de vue, affigner différens angles & différentes viteffes de projection, qui feroient toutes retomber le corps au même point d'où il eft parti; foit avant que la terre ait fait une révolution, foit quand elle en aura fait un nombre donné.

3. Il eft prefqu'inutile de remarquer que dans le cas de la note (a^5) fi $G' = G$, cas où le corps décrit une ligne

droite verticale, on aura $Aa=0$, (Fig. 49) & aa ou $\frac{Aa}{\sqrt{\left(\frac{M}{289a}\right)}}=\frac{4k}{\sqrt{\left(\frac{2Mk}{aa}\right)}}$; d'où l'on tire $aa=17.2\sqrt{(2ka)}$; & si $G'-G$ étoit négatif, alors aa au lieu d'être $=Aa-Aa$ seroit $=Aa+Aa$, le point a se trouvant alors de l'autre côté de A.

Note (a^{II}), *article 55.*

Nous avons supposé dans les recherches précédentes, que la vitesse de rotation de la terre étoit donnée, comme elle l'est en effet; mais si elle ne l'étoit pas, il seroit très-facile de trouver quelle elle devroit être, pour que le corps A lancé avec une vitesse & une direction donnée, retombât au même point; car ayant décrit l'ellipse ABa, que doit parcourir le corps en vertu de sa vitesse & de sa direction, & connoissant sa vitesse horisontale en A, on multipliera cette vitesse par le secteur circulaire ACa, & on la divisera par le secteur elliptique $ABaC$, ce qui donnera la vitesse de rotation de la terre. Cette considération peut faire comprendre aux Lecteurs même les moins Géomètres, la vérité du paradoxe avancé au commencement de ce Mémoire, savoir, qu'il faut imprimer au corps lancé une certaine vitesse horisontale, pour qu'il retombe précisément au même point. Car il est aisé de voir que $ABaC$ étant $<ACa$, la vitesse de rotation de la terre sera plus petite que la vitesse hori-

fontale abfolue du corps *A*. D'où il eft évident que le corps *A* doit néceffairement recevoir quelque viteffe horifontale de la part de la main ou de l'inftrument qui le lance, indépendamment de la viteffe horifontale qu'il reçoit néceffairement de la rotation de la terre.

Note (a^{12}), *article 55.*

1. Ayant trouvé l'ellipfe *ABa* (Fig. 49) que le corps doit décrire pour retomber au même point d'où il eft lancé, il eft évident que fi au point *B* de l'ellipfe *ABa*, le corps eft lancé horifontalement avec une viteffe abfolue égale à celle qu'il a en ce point, il retombera précifément au point de la terre placé verticalement au-deffous de *B*; car ce point eft *D*, & il eft évident par les folutions précédentes, que le point *D* décrira l'arc *Da* pendant que le point *B* décrit l'arc *Ba*. Si donc la viteffe abfolue imprimée au corps en *B*, étoit $= \frac{G \times CB}{CD}$, c'eft-à-dire, égale à la viteffe que le point *B* reçoit par la rotation de la terre, le corps n'auroit befoin d'aucune viteffe horifontale de projection pour retomber au point *D*, quand ce point *D* feroit arrivé en *A*.

2. Or il eft d'abord évident que ce cas ne fauroit avoir lieu fi *BD* eft fort petit par rapport à *AC*. Car en ce cas *BA* eft prefqu'une parabole, & $\frac{BaC}{DAC} =$

à

à très-peu-près $\frac{aD\times\left(\frac{2}{3}BD+\frac{DC}{2}\right)}{aD\times\frac{DC}{2}}=1+\frac{4BD}{3DC}$.

Donc si les vitesses en *B*, *D* sont entr'elles comme *BC* à *DC*, les temps par les arcs *Ba*, *Da* sont entr'eux comme $1+\frac{4BD}{3DC}$ à $1+\frac{BD}{DC}$; c'est-à-dire, que le premier est plus grand que le second. Donc le corps lancé retomberoit sur un point plus occidental que *D*.

3. En général, le quarré de la vitesse en *B* est $=\frac{2M}{a(1+m)}-\frac{M}{a}=\frac{M}{a}\left(\frac{1-m}{1+m}\right)=\frac{M(1-m)(1+m\,\text{cos}.\,u)}{a(1+m)}$; or pour que les points *B* & *D* arrivent en même-temps au point *a*, sans que le point *B* ait reçu aucune impulsion horisontale, il faut que le quarré de la vitesse en *B* soit au quarré de la vitesse en *D*, comme BC^2 à DC^2; c'est-à-dire, comme $aa(1+m)^2$ à a^2, ou comme $(1+m)^2$ à $(1+m\,\text{cos}.\,u)^2$, donc le quarré de la vitesse du point *D* doit être $=\frac{M(1-m)(1+m\,\text{cos}.\,u)^3}{a(1+m)^3}$. Et comme le quarré de cette vitesse doit d'ailleurs être $=\frac{M}{(17)^2a}$; il s'ensuit qu'on aura $\frac{(1-m)(1+m\,\text{cos}.\,u)^3}{(1+m)^3}=\frac{1}{(17)^2}$. Delà on tire la valeur de cos. *u* en *m*; savoir, $(1+m\,\text{cos}.\,u)^3=$

$\frac{(1+m)^3}{(1-m)17^2}$; d'où l'on voit que cos. u doit être entre 1 & 0, & par conséquent avoir une valeur possible, puisque cos. $u=1$, donne le premier membre > que le second, & cos. $u=0$, le premier membre < que le second, si m est tel que $(1-m)17^2<(1+m)^3$. On cherchera ensuite parmi les courbes de l'art. 9, dont les coordonnées sont $u+m\sin. u$ & $(1+m\cos. u)^{\frac{3}{2}}\Omega$, celle qui satisfait en même-temps, & par la même valeur de m, à la condition précédente, & à la proportion de l'art. 6. Par-là on connoîtra u & m, & on aura facilement ensuite le demi-axe 2a de cette ellipse, c'est-à-dire, $\frac{2a}{1+m\cos. u}$, & la hauteur $BD=$ a$(1+m)-a$.

Note (a^{13}), *article* 40.

Soit MP (Fig. 54) l'arc de grand cercle & MN l'arc de petit cercle, à qui la corde en question est commune, les tangentes QM, RM de ces deux arcs donneront le plan tangent de la sphere en M, lequel sera perpendiculaire au plan du grand cercle MP; or le plan DCF (Fig. 52) qui coupe les deux arcs par la moitié sera aussi perpendiculaire au plan du grand cercle MP. Donc la commune section RQ du plan tangent & du plan DCF sera perpendiculaire au plan MP, & par conséquent à MR. De plus, il est aisé

de voir que MR & MQ seront les tangentes des deux arcs; & que la tangente de l'angle ω, représenté par l'arc $NM = \frac{MQ}{BF}$; donc cos. RMQ ou $\frac{MR}{MQ} = \frac{\text{tang. } \Omega}{\text{tang. } \omega . BF}$.



§. II.

Sur la rotation d'un corps de figure quelconque.

1. ON ſait que lorſqu'un corps de figure quelconque tourne, ou plutôt pirouette d'une maniere quelconque ſur ſon centre de gravité, il y a toujours une ligne paſſant par ce centre, autour de laquelle le corps tourne dans un inſtant quelconque, ligne qui peut varier pour chacun des inſtans de mouvement. J'ai donné dans le Tome I de mes *Opuſc.* pag. 95 & ſuiv., les équations néceſſaires pour déterminer à chaque inſtant la poſition de cette ligne ou axe de rotation. Voici encore une maniere d'y parvenir, plus ſimple qu'aucune que je connoiſſe.

2. Imaginons une ligne à volonté, qui paſſe par le centre de gravité du corps, & que j'appellerai *axe* du corps; & un plan paſſant auſſi par le centre de gravité, & perpendiculaire à l'axe, plan que je nommerai *l'équateur* du corps. Soit pris ſur l'axe depuis le centre une longueur à volonté que j'appelle 1, & ſoit $d\omega$ le mouvement de ce point; faiſons paſſer par la petite ligne $d\omega$, & par l'axe du corps, un plan qui coupera l'équateur du corps en CAB (Fig. 55), C étant le centre de gravité; & ſoit menée dans le plan de l'équateur la ligne DCE perpendiculaire à ACB.

3. Cela posé, imaginons, suivant la théorie que j'ai donnée à l'endroit cité, de la rotation des corps de figure quelconque, que tandis que l'axe & la ligne ACB, se meuvent du mouvement angulaire $d\omega$ dans le plan qui passe par l'axe & par $d\omega$, la ligne DCE se meuve autour du centre C d'un mouvement angulaire qui soit $= d\xi$ à la distance 1; supposons ensuite que le mouvement angulaire $d\omega$ soit de C vers B, & le mouvement angulaire $d\xi$ de E vers B, il est clair, 1°. que tous les points placés à une distance quelconque ρ, perpendiculaire à la ligne DCE, auront parallèlement à CB un mouvement $= \rho\, d\omega$; 2°. que dans le plan parallèle à l'équateur, & placé à la distance ρ, tous les points éloignés de l'axe de la distance f, auront un mouvement $f d\xi$ dans le sens EBD. Donc prenant ρ quelconque, si on prend f ou CV tel que $\frac{f}{\rho} = \frac{d\omega}{d\xi}$, il est clair que tous les points placés dans la diagonale du rectangle qui a pour côtés f & ρ, auront des mouvemens opposés & égaux, & par conséquent seront en repos. Cette ligne sera donc le véritable axe de rotation qui ne sauroit, ce me semble, être déterminé par une équation plus facile & plus simple.

4. Puisqu'à chaque instant du mouvement il y a un axe de rotation, il est donc clair qu'il y a dans le corps une ligne fixe pendant chaque instant, c'est-à-dire, qui au commencement & à la fin de l'instant à la même position.

5. M. Euler a obſervé (Mém. de Peterſb. Tom. XX), qu'il en étoit de même pour un temps quelconque ; & nous allons prouver par un calcul très-ſimple que cela eſt en effet, c'eſt-à-dire qu'en ſuppoſant le centre de gravité immobile, il y a, au bout d'un temps quelconque, une ligne du corps, paſſant par le centre de gravité, qui ſe retrouve dans la même poſition où elle étoit au premier inſtant.

6. Pour le démontrer, imaginons que l'axe du corps ſoit au commencement du mouvement, & au bout d'un temps quelconque t, dans deux ſituations différentes & quelconques ; & par ces deux poſitions, imaginons un plan qui coupe l'équateur en ACB ; cela poſé,

7. Je ſuppoſe, pour ne point me répéter, qu'on ait ici ſous les yeux le Tome I de nos *Opuſcules*, IIe Mémoire, je nomme Π l'angle formé par les deux ſituations de l'axe au commencement du mouvement, & au bout du temps t ; & faiſant pour abréger $a - b = \rho$, j'aurai d'abord, page 79 du volume cité, $\pi = \rho$ ſin. $\Pi + f$ coſ. Π coſ. $(\xi + P)$; enſuite, comme on peut ſuppoſer le plan de projection tel que $e = 0$, j'aurai (*ibid.*) ſin. $e = 0$, & coſ. $e = 1$; donc $u = \rho$ coſ. $\Pi - f$ ſin. Π coſ. $(\xi + P)$; & $z = f$ ſin. $(\xi + P)$.

8. Or il faut trouver le point où ces valeurs ſont les mêmes que lorſque $t = 0$, $P = 0$, $\Pi = 0$, ce qui donne les trois équations

ρ fin. $\Pi + f$ cof. Π cof. $(\xi + P) = f$ cof. ξ,
ρ cof. $\Pi - f$ fin. Π cof. $(\xi + P) = \rho$,
f fin. $(\xi + P) = f$ fin. ξ.

9. Les valeurs de $\frac{\rho}{f}$ tirées des deux premieres équations, donnent $\frac{\text{cof. } \xi - \text{cof. } \Pi \text{ cof. } (\xi + P)}{\text{fin. } \Pi} = \frac{\text{fin. } \Pi \text{ cof. } (\xi + P)}{\text{cof. } \Pi - 1}$, d'où l'on tire $\frac{\text{cof. } \xi}{\text{fin. } \Pi} = \text{cof.} (\xi + P) \times \left[\frac{\text{fin. } \Pi}{\text{cof. } \Pi - 1} + \frac{\text{cof. } \Pi}{\text{fin. } \Pi}\right] = \frac{\text{cof. } (\xi + P)(1 - \text{cof. } \Pi)}{(\text{cof. } \Pi - 1) \text{ fin. } \Pi}$; donc $-$ cof. $\xi =$ cof. $(\xi + P)$; de plus, la troisiéme équation donne fin. $\xi =$ fin. $(\xi + P)$; d'où il eft clair que $\xi + P$ doit être $= 180 - \xi$; & que par conféquent $\xi = \frac{180 - P}{2}$. Cette valeur de ξ & la valeur trouvée de $\frac{\rho}{f}$ donneront évidemment la pofition de la ligne qui a la même pofition au bout du temps t, qu'elle avoit lorfque $t = 0$. Car il n'y a qu'à faire l'angle $ACF = \xi = \frac{180 - P}{2}$; & prendre $f = \frac{\rho (\text{cof. } \Pi - 1)}{\text{fin. } \Pi \text{ cof. } (\xi + P)}$; fi la valeur de f eft pofitive, il faudra prendre $CF = f$, & la prendre de l'autre côté fi elle eft négative. La diagonale du rectangle formé fur CF & fur ρ, menée par le point C, fera évidemment la ligne qu'on cherche.

10. Nous avons fuppofé que cette ligne paffe par le centre de gravité, autour duquel le corps pirouette; mais fi on faifoit pirouetter le corps autour d'un autre

point fixe quelconque, il eſt clair que la même propoſition auroit lieu, & qu'il y auroit toujours une ligne paſſant par ce point qui auroit la même poſition au bout du temps t, & lorſque $t = 0$.

11. Imaginons préſentement que le corps ſoit libre; il eſt clair que le mouvement de chaque point ſera compoſé d'un mouvement égal & parallèle à celui du centre de gravité, ou d'un autre point quelconque, & d'un mouvement de pirouettement autour de ce point; d'où il eſt aiſé de conclure que la ligne que nous venons de voir conſerver ſa poſition, demeurera parallèle à elle-même, ſi le centre de gravité, ou le point quelconque par lequel elle paſſe, eſt ſuppoſé ſe mouvoir.

12. Donc non-ſeulement une des lignes qui paſſent par le centre de gravité, ſera parallèle à elle-même, au bout du temps t, & lorſque $t = 0$, mais toutes les lignes menées dans le corps parallèlement à celle-là, auront la même propriété; ce qui eſt évident par la rigidité du corps.

13. Nous avons dit ci-deſſus (art. 7) qu'on peut ſuppoſer le plan de projection tel que $e = 0$, & que de plus $\Pi = 0$ lorſque $t = 0$. En effet, on peut prendre pour ce plan de projection, celui qui paſſe par l'axe & par la ligne DCE, dans le premier inſtant du mouvement; ce qui donne d'abord $\Pi = 0$ lorſque $t = 0$; & comme outre cela l'axe du corps eſt ſuppoſé (au commencement & à la fin du temps t) dans le plan qui

qui paſſe par cet axe & par la ligne ACB, il s'enſuit qu'à la fin du temps t la ligne DCE n'a point changé de poſition ſur le plan de projection, ce qui donne $e = 0$.

14. Nous avons auſſi ſuppoſé (art. 3) que le mouvement $d\omega$ étoit parallèle à CB, & dans le ſens CB, & que le mouvement $d\xi$ ſe faiſoit de E vers B, en ſorte que le mouvement du point V eſt parallèle à CB & en ſens contraire; ſi *un ſeul* de ces deux mouvemens avoit une direction contraire à celle que nous leur ſuppoſons, il faudroit prendre CV de l'autre côté de C; mais ſi *tous les deux* avoient une direction contraire, V reſteroit du côté où il eſt dans la figure.

---

§. IV.

Sur l'intégration de quelques équations différentielles.

1. J'AI donné, il y a plus de trente ans, dans les Mém. de l'Acad. de Berlin, la méthode d'intégrer certaines équations linéaires à pluſieurs variables, en multipliant ces équations par des coefficiens conſtans indéterminés, & en les ajoutant enſemble. On pourroit plus généralement ſuppoſer que le coefficient multiplicateur ſoit variable, ce qui donneroit l'intégration

dans plusieurs cas. Soit, par exemple,

$$dt + \rho u dx = 0,$$
$$du + \sigma t dx = 0,$$

σ & ρ étant des fonctions de x, & multiplions la seconde équation par une fonction indéterminée ξ de x, on aura $dt + \xi du (\rho u + \sigma \xi t) dx = 0$, ou $d(t + \xi u) + \left(\rho u + \sigma \xi t - \frac{u d\xi}{dx}\right) \times dx = 0$, qui sera évidemment intégrable, si $\rho - \frac{d\xi}{dx} = \xi \times (\sigma \xi)$.

2. On pourroit aussi multiplier la premiere équation par un autre coefficient indéterminé ξ', ce qui donneroit, en les ajoutant ensemble $\xi' dt + \xi du + (\rho \xi' u + \sigma \xi t) dx = 0$, ou $d(\xi' t + \xi u) + \left(\rho \xi' u + \sigma \xi t - \frac{u d\xi}{dx} - \frac{t d\xi'}{dx}\right) dx = 0$; équation qui sera intégrable si $\frac{\rho \xi' - \frac{d\xi}{dx}}{\xi} = \frac{\sigma \xi - \frac{d\xi'}{dx}}{\xi'}$.

3. Soient encore les équations $\lambda du + \nu dt + \rho u dx + \sigma t dx = 0$; & $\delta dt + \mu du + \varpi u dx + \gamma t dx = 0$, λ, ν, ρ, σ, δ, μ, &c. étant des fonctions de x; on peut faire évanouir dt de l'une de ces équations, & du de l'autre, en multipliant d'abord la premiere par δ, & la seconde par ν, pour faire évanouir dt, & ensuite la premiere par μ, & la seconde par λ pour faire évanouir du; ce qui donnera deux équations de cette forme:

$$du + \rho' u dx + \sigma' t dx = 0,$$
$$dt + \varpi' u dx + \gamma' t dx = 0;$$

& on peut opérer de même ſur ces deux équations en multipliant la premiere par ξ', & la ſeconde par ξ, & en faiſant ſi l'on veut $\xi' = 1$.

4. Soit l'équation $ddt + \zeta dtdx + \nu tdx^2 + Tdx^2 = 0$, ζ, ν, T étant des fonctions données ou connues de x, on ſait que ſi cette équation eſt intégrable dans le cas de $T = 0$, elle le ſera auſſi en prenant pour T telle fonction de x qu'on voudra.

5. Préſentement ſoit miſe l'équation $ddt + \zeta dtdx + \nu tdx^2 = 0$, ſous la forme $ddt + (\mu + \zeta)dtdx - \mu dtdx + (\eta + \nu)tdx^2 - \eta tdx^2 = 0$, μ & ν étant des fonctions quelconques & indéterminées de x.

6. Soit fait enſuite $dt + \rho udx + \sigma tdx = 0$, u étant une nouvelle indéterminée, & ρ, σ des fonctions de x, auſſi indéterminées, on aura $ddt = -\rho dudx - ud\rho dx - \sigma dtdx - td\sigma dx$; & ſubſtituant les valeurs de dt, de ddt, & de t dans les termes ddt, $-\mu dtdx$, & $-\eta tdx^2$ de la ſeconde équation, on aura les deux équations :

$$dt + \rho udx + \sigma tdx = 0,$$

$$\& \; -du - \frac{ud\rho}{\rho} - \frac{\sigma dt}{\rho} - \frac{td\sigma}{\rho} + \frac{\mu\rho udx^2}{\rho} + \frac{\mu\sigma tdx^2}{\rho} + \frac{(\mu+\zeta)dtdx}{\rho} + \frac{(\eta+\nu)tdx^2}{\rho} - \frac{\eta dtdx}{\sigma\rho} - \frac{\eta\rho udx^2}{\sigma\rho} = 0.$$

On peut mettre, pour abréger, la ſeconde équation ſous cette forme :

$$du+\varpi' dt+\varpi u dx+\gamma t dx=0.$$

7. Soit multipliée la premiere équation par un coefficient indéterminé ξ, qui soit une fonction inconnue de x; & soient ajoutées ensemble les deux équations, on aura l'équation $du+(\xi+\varpi')dt+(\varpi u+\rho\xi u)dx+(\sigma\xi+\gamma)tdx=0$; qu'on peut mettre sous cette forme :

$$d(u+\xi t+\varpi' t)+udx(\varpi+\rho\xi)+tdx\left(\sigma\xi+\gamma-\frac{d\xi}{dx}-\frac{d\varpi'}{dx}\right)=0,$$

équation qui sera évidemment intégrable, si on a

$$\varpi+\rho\xi=\frac{\sigma\xi+\gamma-\frac{d\xi}{dx}-\frac{d\varpi'}{dx}}{\xi+\varpi'}.$$

8. Or comme les quantités ρ & σ sont indéterminées, ainsi que μ & ν, d'où dépendent ϖ, ϖ' & γ, on voit que cette équation de condition renferme plusieurs indéterminéees, par le moyen desquelles on pourra peut-être parvenir, au moins en plusieurs cas, à l'intégration de l'équation différentielle proposée; laquelle intégration se réduit à déterminer ξ par l'équation différentielle précédente.

9. Connoissant ξ, on aura la valeur de $u+\xi t+\varpi' t$ en x, & par conséquent u en t & x, de maniere que t ne sera qu'au premier degré dans cette équation, & pour lors en substituant cette valeur de u dans l'équation $dt+\rho u dx+\sigma t dx=0$, elle s'intégrera par les

méthodes connues, & donnera la valeur cherchée de t en x.

10. Nous laiſſons aux Géomètres à pouſſer plus loin ces vues, qui pourroient s'étendre à plus de deux équations, & aux équations différentielles d'un ordre plus élevé, pourvu que les inconnues & leurs différences n'y fuſſent élevées qu'au premier degré.

11. En effet, ſi on a pluſieurs équations différentielles du premier degré, il n'y a qu'à les multiplier ſucceſſivement par ξ', ξ, ζ, &c. en ſuppoſant ſi l'on veut $\xi' = 1$, & enſuite les ajouter enſemble, & ſuppoſer que la réſultante puiſſe être repréſentée par $d(t + \xi u + \zeta y +$ &c.$) + X(t + \xi u + \zeta y$ &c.$)\,dx = 0$.

12. Et ſi on a des équations différentielles d'un ordre plus élevé, on les réduira à pluſieurs équations différentielles du premier degré, en introduiſant de nouvelles inconnues, comme on a fait ci-deſſus pour l'équation $ddt + \zeta dt dx$ &c.$= 0$, & on opérera enſuite ſur toutes ces équations différentielles du premier degré, en employant la méthode que nous venons d'expoſer.

13. A l'occaſion de ces recherches ſur les équations différentielles du ſecond ordre, j'obſerverai qu'il faut ajouter quelque choſe à la méthode que j'ai donnée ſur ce ſujet (Mém. Acad. 1769, pag. 108), pour completter cette méthode. Soit α' la valeur de $\frac{dt}{dz}$ lorſque $z = 0$, valeur qu'on ſuppoſe donnée; il faut d'abord

intégrer l'équation $ddt + \alpha t dz^2 + \varphi dz^2 = 0$ (φ étant une fonction donnée de t & de z), en multipliant par dt, ce qui donne $dt^2 + \alpha t^2 dz^2 + 2dz^2 \int \varphi dt + \alpha'^2 = 0$; & on substituera toujours à la place de dt^2 cette valeur dans les différentiations successives. La raison de cette opération, c'est qu'en faisant $t = Ac^{Nz}$, la valeur de α' doit influer sur celle de N; comme il est aisé de le voir en intégrant l'équation $ddt + \alpha t dz^2 + Bttdz^2$ &c. $= 0$.

14. Je dois remarquer aussi, en finissant cet article, que j'ai donné, ou plutôt indiqué dans les Mémoires de l'Académie de 1769, pag. 137, une méthode pour intégrer très-facilement, quand cela est possible, les équations différentielles d'un degré quelconque, où l'inconnue & ses différences sont linéaires. D'autres Géomètres se sont depuis exercés avec succès sur le même objet.

15. J'ajouterai encore que dans les Mémoires de Petersbourg de 1777, M. *Lexell* remarque avec raison que la méthode que j'ai donnée dans ma *Dynamique* pour intégrer plusieurs équations différentielles linéaires & du second ordre, qui renfermeroient plusieurs variables, ne peut s'appliquer au cas où ces équations contiendroient des différentielles de divers ordres. Mais j'ai donné depuis, dans les Mém. de Berlin de 1747 & ailleurs, une méthode générale pour intégrer ces équations, fondée sur un moyen dont M. *Lexell* fait lui-même usage d'une autre maniere dans le savant Mé-

moire qu'il a donné relativement à cet objet, c'est-à-dire, fondé sur la multiplication de toutes les équations par des coefficiens constans & indéterminés, après les avoir toutes réduites à des équations différentielles du premier ordre ; ce qui est très-facile.



APPENDICE

Contenant quelques Remarques relatives à différens endroits de ce VIIe Volume.

Remarque sur la page 16, art. 40, lig. 8.

ON doit observer que nous mettons ici $\frac{ddy}{ds} = \frac{d\omega}{A}$, & non pas $\frac{ddy}{ds} = -\frac{d\omega}{A}$, comme on pourroit d'abord le penser ; parce que la courbe AM du ressort (Fig. 1) étant convexe vers la tangente horisontale en B, & les dy allant en diminuant à mesure que $AM(s)$ va en croissant, les ddy qui seroient positifs, si dy & s croissoient en même-temps, doivent être pris négativement quand dy décroît à mesure que s croît. Donc on doit faire $-\frac{ddy}{ds} = -\frac{d\omega}{A}$, & par conséquent $\frac{ddy}{ds} = \frac{d\omega}{A}$.

Remarque sur le LIIe Mémoire, §. II, pag. 45.

1. Si ω est supposé infiniment petit, on aura évidemment $\Omega = \omega(A + B\omega + C\omega^2 \text{ \&c.})$, A, B, C, étant

étant des coefficiens conſtans ; & il eſt à remarquer que ces quantités A, B, C, &c. ſont très-grandes, & même infinies, ſi le nombre des coups eſt indéfini. En effet, ſi n eſt le nombre des coups, on a $\Omega = \frac{2\omega[1 - 2^n(1-\omega)^n]}{1 - 2(1-\omega)}$; en ſorte que A, par exemple, eſt $= 1 + 2 + 4 + \&c. = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1$, & ainſi du reſte. Il eſt d'ailleurs aiſé de voir, par la nature de la ſuppoſition, & en partant de la théorie ordinaire des probabilités, qu'en ſuppoſant ω très-petit, Ω doit être très-grande, & que néanmoins Ω doit être $= 0$ ſi $\omega = 0$.

2. Ainſi $\int \Omega d\omega$, lorſque ω eſt très-petit, ſera $\frac{A\omega^2}{2} + \frac{B\omega^3}{3} + \&c.$, & en général $\int \Omega d\omega = \int \frac{2\omega d\omega[2^n(1-\omega)^n - 1]}{1 - 2\omega}$, quantité qui s'intégre aiſément par les méthodes connues.

3. Il faut obſerver encore que dans la quantité $\frac{\int \Omega d\omega}{\omega}$, le dénominateur ω étant ſuppoſé repréſenter tous les nombres depuis 0 juſqu'à 1, on peut ſuppoſer pour plus de ſimplicité $\omega = 1$, & réduire $\frac{\int \Omega d\omega}{\omega}$ à $\int \Omega d\omega$. Mais cette réduction ſuppoſe que tous les cas ſont ici également poſſibles, & c'eſt ce qui n'eſt pas. Car quoiqu'en général il ſoit très-vraiſemblable que la piece a plus de penchant à tomber d'un côté que de l'autre ; cepen-

dant il eſt évident qu'on peut regarder comme les cas les plus probables, ceux où ω ne ſera que peu différent de $\frac{1}{2}$; parce que la piéce eſt toujours (au moins très-probablement) conſtruite de maniere qu'elle n'aura que *peu de penchant* à tomber ſur l'une des deux faces de *préférence à l'autre*; le cas où ω feroit $= 0$, ou $= 1$, doit être regardé comme impoſſible, ou preſqu'impoſſible, parce qu'il n'eſt pas vraiſemblable que la piece ne puiſſe tomber jamais que ſur une ſeule de ſes deux faces; & le cas où ω feroit exactement & rigoureuſement $= \frac{1}{2}$ feroit auſſi preſqu'impoſſible, parce qu'elle ſuppoſeroit dans la conſtruction de la piece une perfection preſqu'inadmiſſible. Ainſi, pour rendre la ſolution plus exacte, la quantité Ω doit être multipliée par une quantité Ω', dont la propriété ſoit telle que Ω' ſoit $= 0$ lorſque $\omega = 0$ ou 1; qu'elle ſoit encore $= 0$ lorſque $\omega = \frac{1}{2}$; & qu'elle ſoit enfin très-petite dans preſque tous les cas, excepté ceux où $\omega = \frac{1}{2} + \rho$, ρ étant une très-petite quantité poſitive ou négative; & à l'égard du dénominateur ω, il y faut ſubſtituer la quantité $\int \Omega' d\omega$, laquelle eſt à peu-près $= 2\rho$, puiſque tant que ρ eſt très-petit, Ω' eſt preſque $= 1$, & que ce cas s'étend depuis $\Omega' = \frac{1}{2} + \rho$, juſqu'à $\Omega' = \frac{1}{2} - \rho$. Je ne fais qu'indiquer ces différentes remarques, & les calculs qui doivent en réſulter. On trouvera des recherches à peu-près du même genre dans le Tome IV de nos *Opuſcules*, pag. 74 & ſuiv. & dans le Tome II, pag. 57 & ſuiv.

Remarque sur la pag. 171, art. 134.

Quand je dis ici que j'ai intégré, par des arcs de sections coniques, la différentielle de l'attraction d'un sphéroïde, il faut se souvenir que l'intégration n'a été faite qu'en partie, puisque l'élément de l'attraction est composé d'une différentielle multipliée par une quantité logarithmique ou circulaire. Or c'est la différentielle seule qui se réduit à des arcs de sections coniques; & il reste encore, pour completter l'intégration, à intégrer le produit de cette différentielle par la quantité logarithmique ou circulaire, ce qui est le plus difficile. Je donne dans cet art. 134 quelques vues pour essayer de résoudre cette difficulté. C'est-là tout ce que je me propose.

Remarque sur le LIIIe Mémoire, art. 134, pag. 172.

1. A la seconde ligne de cette page, il faut — au lieu de +, & à la premiere u au lieu de u'; cela posé, voici la preuve de ce qu'on avance en cet endroit. Soit en général $X dx - V du = d\xi$, ξ étant une quantité algébrique, on aura $X dx \log. \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) + V du \log. \left(\frac{\sqrt{u}+1}{\sqrt{u}-1}\right) = X dx \log. \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) - d\xi \log. A \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) + X dx \log. A \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) = X dx \log. A -$

$d\xi$ log. $A\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)$; l'intégrale de la premiere quantité est évidemment log. $A\int X dx$; l'intégrale de la seconde $d\xi$ log. $A\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)$, se réduira aisément (au moyen de l'intégration par parties) à un seul signe d'intégration; car on sait que l'intégrale de $d\xi$ log. ζ (ζ étant une fonction de x) est ξ log. $\zeta - \int \frac{\xi d\zeta}{\zeta}$.

3. Si l'on supposoit $X dx + V du$ intégrable, il faudroit alors supposer $\frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u-1}} = \frac{A\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$; & en général si on supposoit $B X dx + V du$ intégrable, il faudroit supposer que $X dx$ log. $\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\right) - B X dx$ log. $\left(\frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u-1}}\right)$ se réduisît à $C X dx$, C étant une constante, ce qui donne log. $\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}\right) - B$ log. $\left(\frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u-1}}\right) = C$, ou (pour plus de facilité) $=$ log. E; d'où l'on tire aisément la valeur de $\frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u-1}}$ en x. On doit observer encore que dans cette même page, lig. 7, il faut mettre $-D dx \sqrt{x}$, au lieu de $+D dx$.

Remarque pour la page 34.

Il n'est pas facile de déterminer la théorie des ressorts en les regardant en partie comme des leviers, & en partie comme des corps flexibles. L'hypothèse la plus

naturelle eſt de regarder le reſſort comme compoſé de leviers infiniment petits, AB, qui ſe meuvent, ou peuvent ſe mouvoir circulairement autour d'une charniere circulaire auſſi infiniment petite, & même infiniment plus petite Ac (Fig. 55, n°. 2); en ſorte qu'on imagine appliquée au point c la force du poids, moins celle de l'élaſticité, laquelle force eſt détruite par la réſiſtance ou tenacité des fibres en c; d'après cette ſuppoſition, ſi on fait la force du reſſort en raiſon inverſe du rayon de courbure, on aura en chaque point le moment du poids $= \frac{k}{R} + A$, k étant l'élaſticité, R le rayon de courbure, & A la force conſtante qui vient de la tenacité. Ce qui ne donne point d'autre différence dans l'équation de l'élaſtique (art. 45, pag. 18) qu'un terme Bx ajouté à la conſtante C.

Cependant le problême reſteroit encore indéterminé, la conſtante C étant toujours inconnue; mais pour la déterminer, on pourra ſuppoſer (Fig. 1) que la tangente en B eſt parallèle aux x; car on ne voit pas de raiſon pourquoi le reſſort feroit en B un angle aigu avec BD.

Il faut remarquer encore que la force de tenacité repréſentée par la conſtante A, étant ſimplement une force de réſiſtance, & non pas une force active, il n'y aura de flexion ſi le moment du poids moins $\frac{K}{R}$ eſt par-tout $<$ que A.

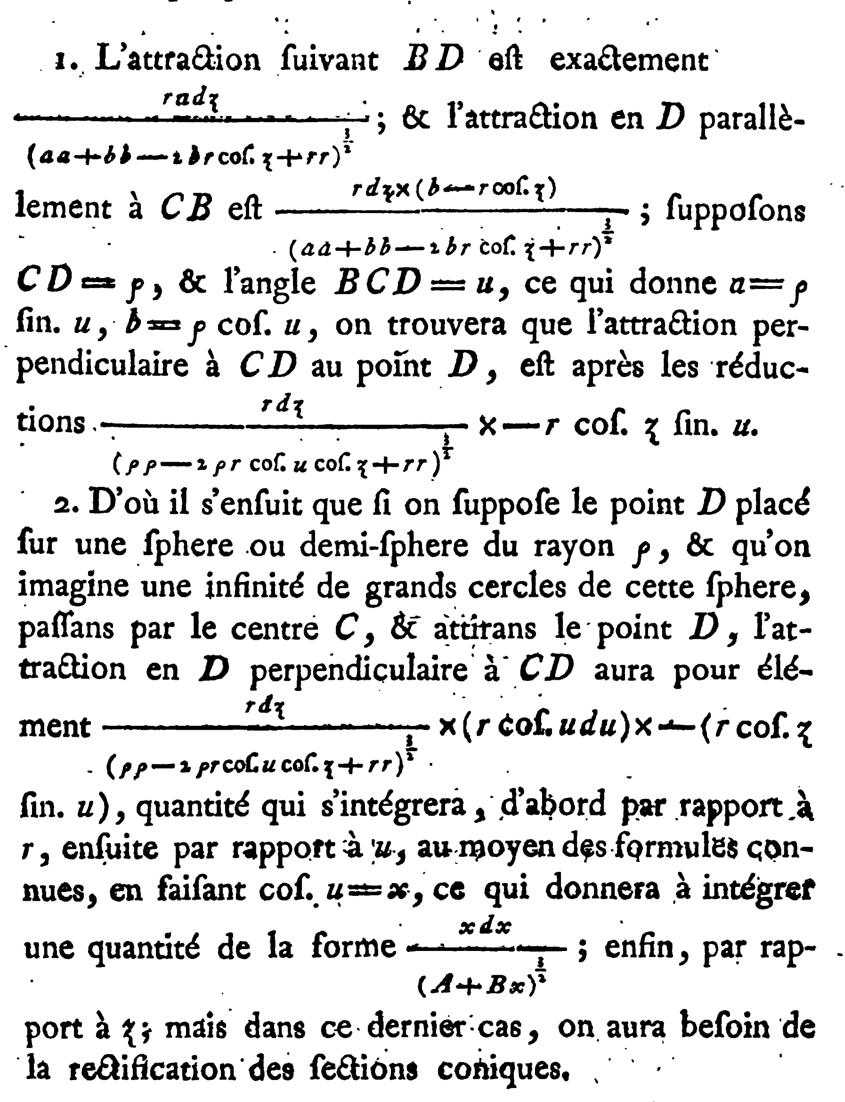
Nous donnons ici la ſolution d'après la théorie or-

dinaire; mais on peut y appliquer de même la théorie que nous avons proposée (art. 9 & suiv.) en ayant l'attention d'ajouter pour l'équilibre le moment constant A, qui résulte de la tenacité des fibres. Nous ne voulons que faire voir ici de quelle maniere on peut faire entrer cette tenacité dans la solution du problême; & nous invitons les Géomètres à perfectionner nos vues à ce sujet, si elles leur paroissent bien fondées.

Remarque pour la page 96.

La quantité $nd(xu) \times \log.(B - Bnuu)$, étant intégrée par parties, donne à intégrer $\int \frac{nxu^2du}{1-nuu} =$ (en mettant pour x sa valeur $\frac{\sqrt{(1-uu)}}{\sqrt{(1-nuu)}}$) $\int \frac{nu^2du\sqrt{(1-uu)}}{(1-nuu)^{\frac{3}{2}}}$.
Or en faisant $uu = z$, & $1 - nuu = t$, on verra aisément par les Mém. de Berlin, 1746, que cette intégrale dépend d'arcs de sections coniques.

On peut observer (ce qui donne de l'extension au calcul dont il s'agit) que la quantité complexe $\int \frac{dx\sqrt{(1-nxx)}}{\sqrt{(1-xx)}} - \int \frac{du\sqrt{(1-nuu)}}{\sqrt{(1-uu)}}$, représente également, ou la différence de deux arcs d'ellipse qui vont en sens contraires, ou la somme de deux arcs qui vont dans le même sens, en ajoutant s'il est nécessaire, une constante convenable.



Remarque pour l'art. 112 du LIIIe Mémoire.

1. L'attraction suivant BD est exactement $\frac{rad\zeta}{(aa+bb-2br\cos.\zeta+rr)^{\frac{3}{2}}}$; & l'attraction en D parallèlement à CB est $\frac{rd\zeta\times(b-r\cos.\zeta)}{(aa+bb-2br\cos.\zeta+rr)^{\frac{3}{2}}}$; supposons $CD=\rho$, & l'angle $BCD=u$, ce qui donne $a=\rho\sin.u$, $b=\rho\cos.u$, on trouvera que l'attraction perpendiculaire à CD au point D, est après les réductions $\frac{rd\zeta}{(\rho\rho-2\rho r\cos.u\cos.\zeta+rr)^{\frac{3}{2}}}\times -r\cos.\zeta\sin.u$.

2. D'où il s'ensuit que si on suppose le point D placé sur une sphere ou demi-sphere du rayon ρ, & qu'on imagine une infinité de grands cercles de cette sphere, passans par le centre C, & attirans le point D, l'attraction en D perpendiculaire à CD aura pour élément $\frac{rd\zeta}{(\rho\rho-2\rho r\cos.u\cos.\zeta+rr)^{\frac{3}{2}}}\times(r\cos.u\,du)\times -(r\cos.\zeta\sin.u)$, quantité qui s'intégrera, d'abord par rapport à r, ensuite par rapport à u, au moyen des formules connues, en faisant $\cos.u=x$, ce qui donnera à intégrer une quantité de la forme $\frac{xdx}{(A+Bx)^{\frac{3}{2}}}$; enfin, par rapport à ζ; mais dans ce dernier cas, on aura besoin de la rectification des sections coniques.

3. Ceci pourroit servir à trouver la déviation du fil à plomb, par l'attraction d'une montagne sphérique, en un point quelconque D de cette montagne. Car le rayon CD étant très-petit par rapport au rayon de la terre, l'attraction perpendiculaire à CD, l'est aussi à peu-près au rayon de la terre, & donne par conséquent à très-peu-près la déviation horisontale.

4. Si le pendule est au pied de la montagne, supposée de la densité δ, l'attraction horisontale est alors la moitié de l'attraction d'une sphère du rayon r & de la densité δ, ce qui rend la déviation facile à calculer.

5. Nous ne devons pas oublier d'observer, que dans l'intégrale indiquée ci-dessus (art. 2) les quantités dépendantes de la rectification des sections coniques, doivent s'évanouir s'il est question d'une sphere entiere, & même d'un hémisphere où le point D seroit placé de telle sorte que l'angle DCB fût $=0$; il pourroit de même arriver que ces quantités vinssent à s'évanouir, s'il étoit question d'un hémisphere, & d'un angle fini DCB. C'est un calcul que nous nous contentons d'indiquer, & dont le résultat pourroit être plus simple qu'on ne le croiroit d'abord.

6. Si on ne veut pas regarder la montagne comme sphérique, mais comme une masse d'une grande étendue par rapport à sa hauteur, ainsi que nous l'avons fait dans le Tome VI de nos *Opusc.* pag. 86 & suiv. on pourroit alors regarder a comme très-petite par rapport à r & à b, & l'attraction suivant BD seroit censée

$= \frac{r a dz}{(bb - 2br \operatorname{cof.} z + rr)^{\frac{3}{2}}}$, mais l'intégration totale dépendroit toujours de la rectification des ſections coniques.

Remarque pour le LIIIe Mémoire, art. 126, page 166.

A propos de ces ſolides formés par la révolution de l'ellipſe autour de ſes diametres conjugués, on peut voir dans l'*Encyclopédie*, au mot *Ellipſe*, Tom. V, pag. 517, col. 2, la démonſtration très-ſimple que j'ai donnée de deux autres théorêmes connus ſur ces diamètres; ſavoir, que les parallélogrammes faits ſur eux ſont égaux, & que la ſomme de leurs quarrés eſt conſtante. J'indique ici ces démonſtrations, parce que la méthode que j'y ai employée peut être employée dans beaucoup d'autres cas, pour prouver très-ſimplement qu'une quantité eſt toujours la même, en faiſant voir que ſa différence eſt nulle. On peut voir dans l'endroit cité de l'*Encyclopédie*, nos réflexions ſur ce ſujet.

Sur le LVe Mémoire, §. II.

1. A l'occaſion des nouvelles recherches que je donne dans cet article, ſur la rotation d'un corps de figure quelconque, je crois devoir dire un mot ſur la queſtion que j'ai traitée dans le Tome IV de mes *Opuſc.* pag. 20 & ſuiv. ſur les ſolides dans leſquels tout axe paſſant par

le centre de gravité, eſt un axe ſpontané de rotation. La ſolution que j'ai donnée de ce problême, pag. 27, art. 76 & ſuiv. n'étant que pour des ſolides peu différens d'une ſphere, n'eſt pas rigoureuſement exacte, à cauſe des petites quantités qu'on y néglige, ſuivant la méthode uſitée dans ces ſortes de queſtions. Ainſi la rotation autour d'un axe quelconque, n'eſt pas rigoureuſement conſtante, mais ſeulement à un infiniment petit du ſecond ordre près. Il en eſt à peu-près ici comme d'un ſphéroïde elliptique peu différent d'une ſphere, & recouvert d'un fluide, tel que les denſités du ſphéroïde & du fluide ſoient entr'elles comme 3 à 5. J'ai démontré que ce ſphéroïde ſeroit toujours en équilibre, quelque figure qu'on lui ſuppoſât, pourvu qu'elle fût elliptique & peu différente d'une ſphere. Mais l'équilibre n'a lieu qu'à un infiniment petit du ſecond ordre près, à cauſe des quantités qu'on néglige. Ainſi la recherche *rigoureuſe* du ſphéroïde dont tous les axes donnent une rotation uniforme, mérite encore le travail des Géometres, & peut-être trouvera-t-on que de tous les ſolides homogènes il n'y a que la ſphere qui ait exactement cette propriété. Il eſt certain que dans la ſphère (où tout eſt ſemblable dans toutes ſes parties) *il n'y a point de raiſon* pour qu'un axe ſoit plutôt que l'autre un axe de rotation uniforme, & qu'ainſi ils le doivent être tous. Cette raiſon n'auroit pas lieu pour un corps non-ſphérique, & peut-être ſeroit-il permis d'en conclure que tous les axes de ce corps

indifféremment n'ont pas la propriété dont il s'agit. Mais j'avoue que cette preuve n'eſt pas démonſtrative, & que le calcul ſeul peut nous éclairer pleinement ſur ce ſujet.

Fin du ſeptiéme Volume.

Fautes à corriger dans le septiéme Volume.

PAGE 4, *ligne 2 : Le — qui est au-devant de la barre, doit être au-dessus ; cette faute se trouve dans quelques autres endroits ; il suffit d'en avertir, les Lecteurs la corrigeront aisément.*

Page 60, *ligne* 10, *au lieu de* en parlant, *lisez* en partant.

Page 92, *ligne* 4, *à compter d'en-bas, au lieu de* R×, *lisez* R*x*.

Page 93, *ligne* 2, *après* un nombre entier, *ajoutez* impair.

Page 101, *ligne* 3, *à compter d'en-bas*, au lieu de *b* négatif, lisez *b* positif.

Page 136, *ligne* 9, *à compter d'en-bas*, au lieu de $\alpha^2\mu^2 + \frac{b^2}{c^2}$, lisez $-\alpha^2\mu^2 - \frac{b^2}{c^2}$.

Page 144, *ligne* 11, au lieu de $\gamma - \delta\omega^2$, lisez $\gamma x - \omega^2$.

Page 185, *ligne* 3, au lieu de > 1, lisez < 1.

Page 200, *ligne* 4, *à compter d'en-bas, au lieu de* multipliés, *lisez* multiplié.

Page 203, *ligne* 16, au lieu de $F =$, lisez $F +$.

Page 205, *ligne* 11, au lieu de B, C, lisez B', C'.

Page 224, *ligne* 7, *au lieu de* verticale, *lisez* horisontale.

Page 232, *ligne* 13, *à compter d'en-bas*, au lieu de ay, lisez αy.

Page 303, *ligne* 2, *à compter d'en-bas, au lieu de* proposé, *lisez* proposés.

Page 365, *ligne* 10, *au lieu de* art. 44, *lisez* art. 32.

Page 367, *ligne* 6, *au lieu de* art. 55, *lisez* art. 34.

Page 368, *ligne* 6, *au lieu de* art. 36, *lisez* art. 55.

UNE inadvertance de l'Imprimeur est cause que dans l'*Appendice* de ce Volume, l'ordre des Remarques n'est pas exactement (comme il l'auroit dû être) le même que celui des pages auxquelles ces Remarques se rapportent ; le Lecteur est prié d'y faire attention.

L'ordre des Remarques dans l'*Appendice* doit être tel qu'il suit :

Remarque sur la page 16,............Voyez page 384 de l'*Appendice*.
Remarque sur la page 34,............Voyez page 388.
Remarque sur la page 45,............Voyez page 384.
Remarque sur la page 96,............Voyez page 390.
Remarque sur la page 166,..........Voyez page 393.
Remarque sur les pages 171 & 172,....Voyez page 387.
Remarque sur l'art. 112 du LIIIe Mém. Voyez page 391.
Remarque sur le LVe Mém. §. II,.....Voyez page 395.

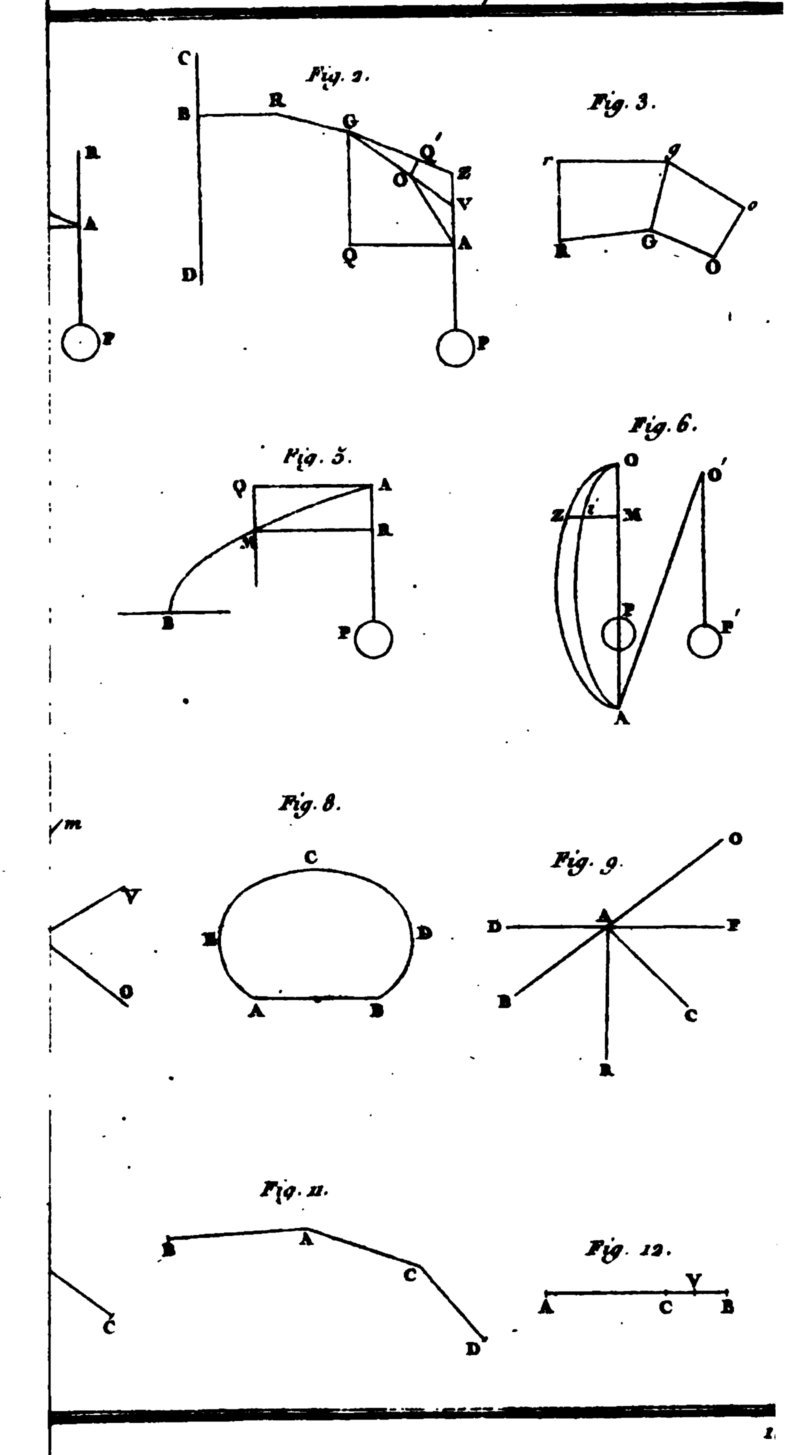
Ce même ordre a été rétabli tel qu'il doit être, dans la Table des Titres.

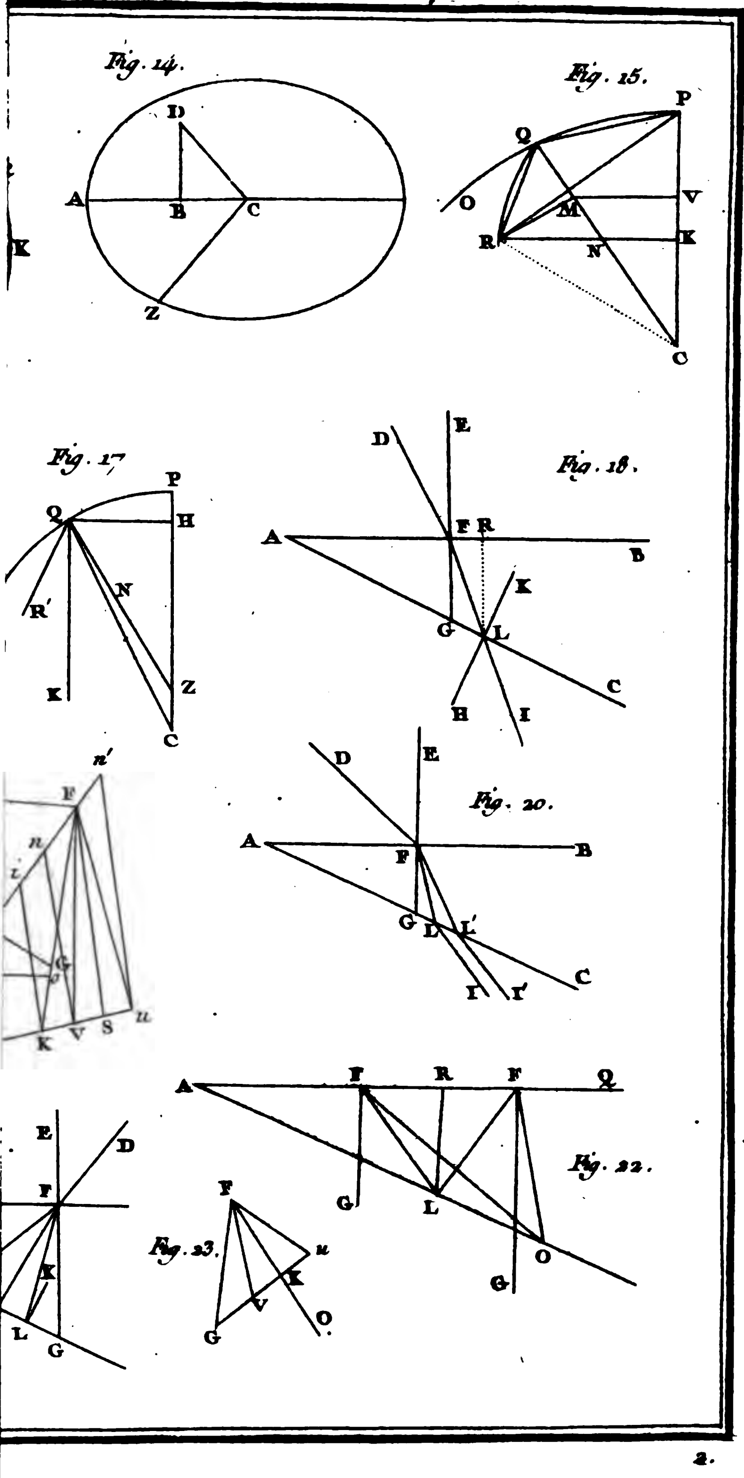
AVIS AU RELIEUR.

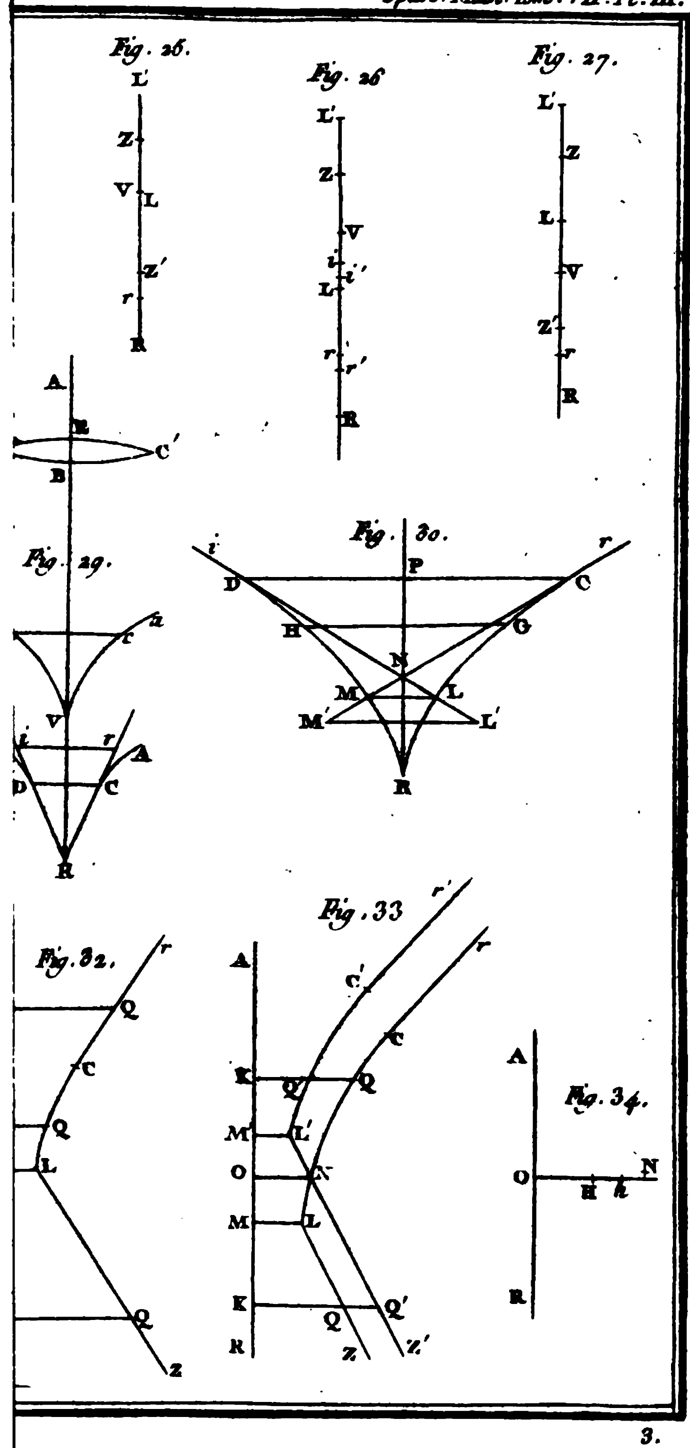
Le Relieur aura attention à bien placer les cartons des Tomes VII & VIII.

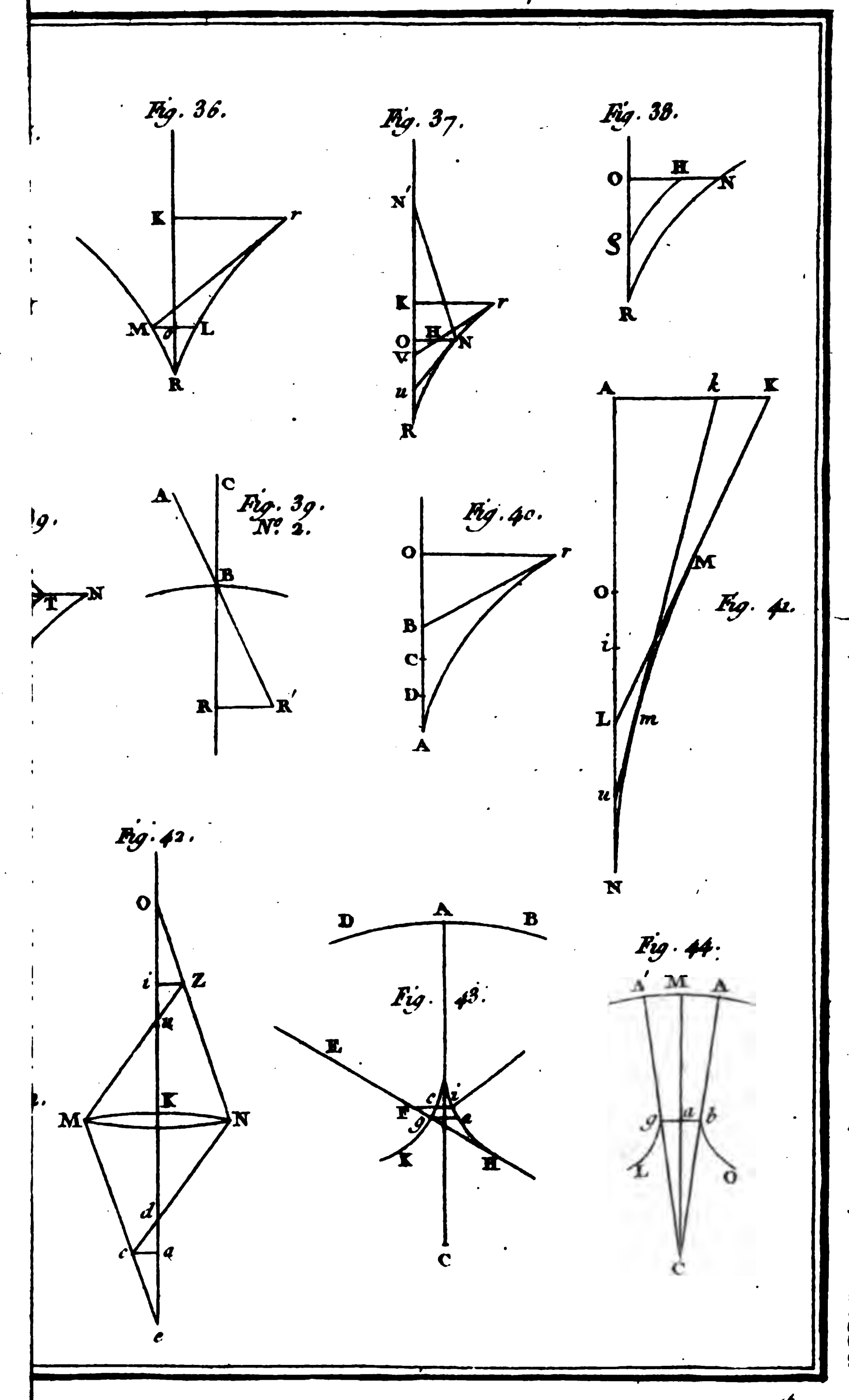
Il y en a un pour le Tome VII, pages 95 & 96.

Pour le Tome VIII, il y en a quatre; savoir, un pour les pages 27 & 28; les trois autres sont pour les pages 47, 48, 49, 50, 51 & 52.


Fig. 2.
C
B
R
G
Q'
O
Z
V
A
Q
D
P
Fig. 3.
r
g
o
R
G
O
Fig. 5.
Q
A
M
R
B
P
Fig. 6.
O
O'
Z
M
P
P'
A
Fig. 8.
C
E
D
A
B
Fig. 9.
O
D
A
F
B
C
R
Fig. 11.
B
A
C
D
Fig. 12.
V
A
C
B


Fig. 14.
D
A
B
C
Z
Fig. 15.
P
Q
O
M
V
R
N
K
C
Fig. 17
P
Q
H
N
R'
K
Z
C
Fig. 18.
D
E
A
F
R
B
K
G
L
C
H
I
n'
F
n
G
K
V
S
u
Fig. 20.
D
E
A
F
B
G
D
L'
C
I
I'
A
F
R
F
Q
Fig. 22.
G
L
O
G
E
D
F
K
L
G
Fig. 23.
F
u
K
V
O
G


Fig. 26.
Fig. 26
Fig. 27.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 32.
Fig. 33
Fig. 34.


Fig. 36.
K
r
M
g
L
R
Fig. 37.
N′
K
r
O
H
N
V
u
R
Fig. 38.
O
H
N
S
R
A
k
K
C
A
Fig. 39.
N° 2.
B
R
R′
T
N
Fig. 40.
O
r
B
C
D
A
M
O
Fig. 41.
i
L
m
u
N
Fig. 42.
O
i
Z
u
K
M
N
d
c
a
e
D
A
B
Fig. 43.
E
c
i
F
g
a
K
H
C
Fig. 44.
A′
M
A
g
a
b
L
O
C

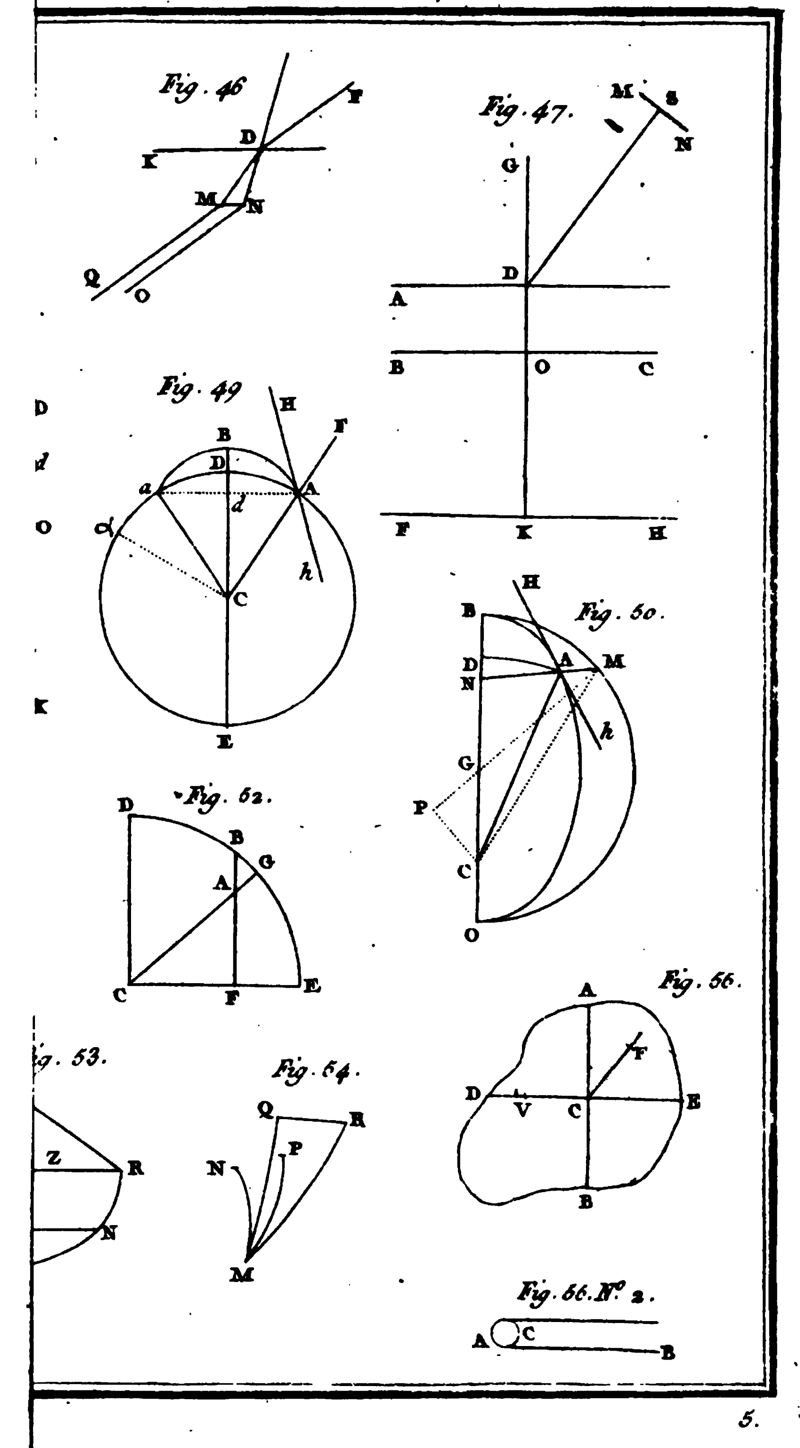


Fig. 46
F
D
K
M
N
Q
O
Fig. 47.
M
S
N
G
D
A
B
O
C
F
K
H
Fig. 49
H
F
B
D
a
A
d
α
C
h
E
D
d
O
K
H
Fig. 50.
B
D
A
M
N
h
G
P
C
O
Fig. 52.
D
B
G
A
C
F
E
Fig. 53.
Z
R
N
Fig. 54.
Q
R
P
N
M
Fig. 56.
A
F
D
V
C
E
B
Fig. 56. N° 2.
A
C
B

